विषय-सूची

1. जैविक विविधता का संरक्षण:भारतीय संदर्भ में
—श्री राम लखन सिंह 1

2. वाहित मल-जल प्रदूषक एवं उनकी अन्योन्य क्रिया
—शिव गोपाल मिश्र, चन्द्र प्रकाश श्रीवास्तव तथा प्रमोद कुमार शुक्ला 9

3. फलन का उसके जैकोबी प्रसार द्वारा सन्निकटन
—सुरेश चन्द्र जैन तथा आशुतोष पाठक 15

4. कई सम्मिश्र चरों वाला H-फलन तथा उष्मा संचालन
—एस० एल० नाहटा 23

5. करमट विधि से लिपशिट्ज वर्ग के फलनों की सन्निकटन कोटि
—आर० पी० गुप्ता, एस० के० वर्मा तथा वेद प्रकाश 31

6. फूरियर श्रेणी की (J, np) संकलनीयता
—एस० के० वर्मा तथा एस० एन० अग्रवाल 35

7. संयुग्मी फूरियर श्रेणी के नालुण्ड माध्यों के द्वारा फलनों का सन्निकटन
—आशुतोष पाठक तथा वन्दना गुप्ता 39

8. कई चरों के H-फलन वाले बहुगुण समाकल
—ए० के० अरोरा तथा सी० एल० कौल 47

9. H-फलनों वाले कतिपय समाकल रूपान्तर
—सुजाता वर्मा 53

10. सार्वीकृत सहचारी लीजेण्ड्र फलन तथा बहुगुण H-फलन वाला एक परिणाम 63
—बी० एल० माथुर

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 32.No. 1. 1989.

जैविक विविधता का संरक्षण : भारतीय संदर्भ में *

राम लखन सिंह

निदेशक, प्रोजेक्ट टाइगर
पर्यावरण एवं वन मंत्रालय, भारत सरकार, नई दिल्ली

जैविक विविधता (बायोलाजिकल डाइवर्सिटी) का आशय है पिछले करोडों वर्षों के उत्क्रमण काल में, धरती पर, अस्तित्व में आये जीव (अर्थात् वनस्पति एवं प्राणि) प्रजातियों का समूह। एक अनुमान के अनुसार धरती पर लगभग एक करोड प्रजातियों के रूप में जीवन फल-फूल रहा है। इनमें लगभग पन्द्रह लाख जीव प्रजातियों को ही अभी तक पहचाना जा सका है। शेष को, जिनमें अधिकांश सूक्ष्म-जीव, विषाणु (वाइरस) एवं जीवाणु (वैक्टीरिया) हैं, अभी भी पहचाना जाना है। पहचानी गयी जीव प्रजातियों में लगभग सवा लाख प्रजातियाँ, भारतीय भू-भाग में पायी जाती हैं। अन्य राष्ट्रों की तुलना में, धरती के मात्र दो प्रतिशत भौगोलिक क्षेत्रफल वाले भारतवर्ष में इतनी अधिक जीव प्रजातियों के पाये जाने का कारण यहां की जलवायु, धरातल की बनावट एवं सांस्कृतिक विविधता को माना जा सकता है। किन्तु बढती हुई जनसंख्या की आवश्यकताओं को पूर्ण करने के लिए जिस तीव्रता से कुछ चुनी फसलों एवं पशु-पक्षियों को ही कृषि, बागवानी, पशुपालन एवं वानिकी (फारेस्ट्री) जैसे भू-उपयोगों में प्राथमिकता मिलती जा रही है, उसके कारण जैविक विविधता को भारी संकट का सामना करना पड रहा है। इसलिए अन्य राष्ट्रों की भाँति हमें भी अपनी जैविक विविधता को संरक्षित करने का योजनाबद्ध प्रयास करना होगा , अन्यथा वर्तमान में कम परिचित अथवा अनुपयोगी प्रतीत होने वाली वनस्पति एवं प्राणि प्रजातियों को उनके लाभ खोजे जाने से पहले ही विलुप्त (एक्सटिंक्ट) हो जाने की स्थिति झेलनी पड सकती है।

बीसवीं सदी की वैज्ञानिक प्रगति का एक उज्ज्वल एवं उल्लेखनीय पहलू यह माना जायेगा कि धरती के दूसरे जीवों पर मानवजाति की निर्भरता को अधिक स्पष्ट रूप से समझा जा सका है। वैसे तो सभी धर्मों एवं संस्कृतियों के विचारक दूसरे जीवों की रक्षा करने की बात कहते हैं। किन्तु ऐसा प्रायः दयाभाव से प्रेरित होकर ही कहा जाता रहा है। इसलिए लाभप्रद नहीं प्रतीत होने वाली वनस्पति एवं प्राणि प्रजातियों को प्राकृतिक रूप से विकसित होने का अधिकार कम ही मिलता था। किन्तु पिछले दो-तीन दशकों में हुई वैज्ञानिक प्रगति, विशेष कर अंतरिक्ष विज्ञान, आनुवंशिक अभियांत्रिकी (जेनेटिक इंजीनियरिंग), परिस्थिति विज्ञान के क्षेत्रों में हुई प्रगति ने जैविक विविधता के संरक्षण को लाभप्रद प्रमाणित करने में पर्याप्त योगदान दिया है।

मानवजाति का इतिहास यही बताता है कि उसका प्रत्येक कार्य अपने उत्थान और विकास की दृष्टि से प्रेरित रहा है। इसलिए प्रारंभ से ही वह उन्हीं वनस्पतियों एवं पशु-पक्षियों को उगाता एवं पालता रहा है जो अधिक उपज देने की क्षमता रखते थे। कहने को इसे मनुष्य की स्वार्थी प्रवृत्ति कहकर दूसरे जीव जन्तुओं की उपेक्षा कहा जा सकता है किन्तु यह तर्कसंगत नहीं होगा। अपने अर्जित ज्ञान एवं अनुभव के आधार पर अधिक से अधिक उत्पादन एवं आय प्राप्त करना मनुष्य की विकासोन्मुख प्रवृत्ति का ही परिचायक है। इसलिए यदि आज सभी राष्ट्रों में जैविक विविधता को संरक्षित करने को राष्ट्रीय विकास नीति का अनिवार्य अंग माना जा रहा है तो भी इसीलिए कि ऐसा करना लाभप्रद समझा जाने लगा है।

---

* 76 वें भारतीय विज्ञान कांग्रेस, मदुरई के अवसर पर 6 जनवरी 1989 को दिया गया अध्यक्षपदीय भाषण।

1. 'वन्यजीव'

प्राकृतिक रूप से उगने वाली समस्त वनस्पति एवं पलने वाले प्राणी, वन्यजीव माने जाते हैं। इस प्रकार प्रथम बार वनस्पति प्रजातियों को कानूनी दृष्टि से वन्यजीव होने का दर्जा मिला। इससे यह भ्रम दूर हो गया कि शेर, बाघ, तेंदुआ, हाथी, गैंडा ही वन्यजीव हैं।

प्राकृतवास (हैबीटैट) : भूमि, पानी, वनस्पति के समूह वाला क्षेत्र जिसमें कोई जीव रहता है। इसी कानूनी स्थिति के कारण राष्ट्रीय उद्यान में वन्यजीवों के साथ-साथ वहाँ की मिट्टी एवं जलस्रोतों को क्षति पहुँचाना भी दण्डनीय अपराध है।

वन्य जीव विहार : ऐसा क्षेत्र जिसकी सीमाओं में किसी भी वन्यप्राणी को कोई भी क्षति पहुँचाना दण्डनीय अपराध हो। इसकी सीमाओं में प्रवेश के लिए पूर्व अनुमति आवश्यक होती है किन्तु पालतू पशुओं का चरान करने की अनुमति राज्य सरकार दे सकती है।

राष्ट्रीय उद्यान : ऐसा क्षेत्र जिसकी सीमाओं में वन्य जीवों और उनके प्राकृतवास को किसी भी प्रकार की क्षति पहुँचाना दण्डनीय अपराध होता है। राष्ट्रीय उद्यान की सीमाओं में चरान करने की छूट देने का अधिकार राज्य सरकार अथवा केन्द्रीय सरकार में किसी को भी नहीं होता। जैविक विविधता को संरक्षण देने की यह सर्वोच्च श्रेणी है। वन्य जीव विहार एवं राष्ट्रीय उद्यानों की स्थापना एवं उनकी व्यवस्था का पूर्ण दायित्व राज्य सरकारों के अधिकार क्षेत्र में आता है।

अनुसूचित वन्य प्राणी : ऐसे वन्य प्राणी जिनकी संख्या इतनी कम हो गयी है कि वन्य जीव विहारों एवं राष्ट्रीय उद्यान की सीमाओं के बाहर भी उन्हें कानूनी सुरक्षा देने की आवश्यकता है। अर्थात् इस सूची में सम्मिलित वन्य प्राणियों के लिए संपूर्ण भारतीय भू-भाग एक संरक्षित क्षेत्र है। कस्तूरी मृग, बारासिंघा, हिरण, बाघ (टाइगर), गैंडा, जंगली हाथी, घडियाल, बंगाल फ्लोरीकन पक्षी आदि ऐसे ही वन्य प्राणी हैं। ऐसे वन्य प्राणियों का व्यापार करना अथवा इनकी खाल रखना भी दंडनीय अपराध है।

संरक्षित क्षेत्रों की दृष्टि से 'बाघ परियोजना' (प्रोजेक्ट टाइगर) अथवा जीवमंडल रिजर्व (बायोस्फियर रिजर्व) का कोई कानूनी दर्जा नहीं है। यह दोनों ही मूलतः वन्यजीव विहार अथवा राष्ट्रीय उद्यान के रूप में ही कानूनी संरक्षण के अधिकारी हो पाते हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि किसी भी भू-भाग में, जलवायु अथवा भौगोलिक विशिष्टता के कारण यदि वनस्पति एवं प्राणि प्रजातियों का ऐसा समुदाय उत्क्रमित होकर निरन्तर विकसित होता रहा है जिसे संरक्षित क्षेत्र का दर्जा देकर सुरक्षा प्रदान करना राष्ट्रीय हित में हो तब उसे वन्यजीव विहार अथवा राष्ट्रीय उद्यान के रूप में स्थापित करना ही एकमात्र उपाय है।

वन्यजीव संरक्षण अधिनियम के लागू हो जाने पर देश में 'वन्य जीव विहारों' एवं 'राष्ट्रीय उद्यानों' की स्थापना करके जैविक विविधता के संरक्षण का योजनाबद्ध कार्य नये सिर से प्रारंभ हुआ। किन्तु एक कमी फिर भी बनी रही। राष्ट्र की भौगोलिक विविधता के अनुरूप यह भी निर्धारित किया जाना आवश्यक था कि किस प्रान्त में कम से कम कितने राष्ट्रीय उद्यान और कितने वन्यजीव विहार स्थापित किए जाने चाहिए। यह कमी पूरी हुई वर्ष 1982 में जब 'राष्ट्रीय वन्यजीव कार्य योजना' (नेशनल वाइल्ड लाइफ एक्शन प्लान) तैयार की गयी। इस कार्य योजना के अनुसार राष्ट्र की जैविक विविधता को संरक्षित करने के लिए निम्न प्रक्रिया अपनायी जानी है—

1. संरक्षित क्षेत्रों (वन्यजीव विहारों और राष्ट्रीय उद्यानों) की न्यूनतम आवश्कता सुनिश्चित करके उनकी स्थापना करना : —

वर्ष 1982 तक हमारे राष्ट्र मे 247 वन्य जीव विहार एवं 54 राष्ट्रीय उद्यान स्थापित हो चुके थे, इनके अर्न्तगत राष्ट्र के भौगोलिक क्षेत्र का लगभग 3 प्रतिशत भू-भाग आरक्षित किया जा चुका था। किन्तु इसका आकलन होना शेष था कि संपूर्ण जैविक विविधता को संरक्षित करने के लिए कितने संरक्षित क्षेत्रों की आवश्यकता थी। इस कार्य को वर्ष 1987 में भारतीय वन्य जीव संस्थान (वाइल्ड लाइफ इंस्टीट्यूट आफ इंडिया) देहरादून ने पूर्ण किया है। इस आकलन के अनुसार राष्ट्र में उपलब्ध जैविक विविधता को संरक्षित करने के लिए निम्न (सारणी 1)अनुसार वन्यजीव विहारों एवं राष्ट्रीय उद्यानों की स्थापना की जानी चाहिए।

सारणी 1

संरक्षित क्षेत्र की किस्म	न्यूनतम वांछित संख्या	कुल क्षेत्रफल वर्ग कि० मी०	राष्ट्रीय क्षेत्रफल का प्रतिशत
राष्ट्रीय उद्यान	148	50,797	1.5
वन्य जीव विहार	503	1,00,545	3.1
संरक्षित क्षेत्र	651	1,51,342	4.6

इस प्रकार यह स्पष्ट हुआ कि हमें वर्ष 1982 में उपलब्ध 301 संरक्षित क्षेत्रों की संख्या को बढ़ाकर कम से कम 651 करना आवश्यक है। वर्तमान अर्थात् 1988 तक यह संख्या 448 (66 राष्ट्रीय उद्यान, 382 वन्यजीव विहार) हो चुकी है और इन संरक्षित क्षेत्रों का कुल क्षेत्रफल 1,41000 वर्ग कि० मी० है। स्पष्टतः अभी तक हम अपनी संपूर्ण जैविक विविधता को एक सुरक्षित प्राकृतवास उपलब्ध नहीं करा सके हैं। जैसा कि ऊपर बताया जा चुका है कि संरक्षित क्षेत्रों की स्थापना राज्य सरकारों द्वारा की जाती है, इसलिए प्रान्तवार स्थिति को समझना आवश्यक है। सारणी 2 में उपलब्ध एवं वांछित संरक्षित क्षेत्रों का विवरण दिया जा रहा है।

सारणी 2 की विवेचना से निम्न निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं :

(1) प्रत्येक प्रान्त अपने अधिकार क्षेत्र में उपलब्ध वनस्पति एवं प्राणि प्रजातियों को विकसित होने के लिए न्यूनतम प्राकृतवास देने के लिए स्वतंत्र और उत्तरदायी है। तुलनात्मक दृष्टि से सिक्किम, हिमाचल प्रदेश, अरुणाचल प्रदेश, मध्यप्रदेश और केरल में स्थिति अच्छी है जब कि हरियाणा, पंजाब, जम्मू-कश्मीर, आसाम और तमिलनाडु में संरक्षित क्षेत्र कम हैं।

(2) संरक्षित क्षेत्रों की वांछित संख्या एवं श्रेणी का आकलन इस आधार पर किया गया है कि प्रत्येक जैव-समुदाय (बायोम) को संरक्षण देने के लिए कम से कम राष्ट्रीय उद्यान स्तर का एक संरक्षित क्षेत्र अवश्य हो।

(3) वांछित संख्या में संरक्षित क्षेत्र स्थापित हो जाने के बाद भी गंगा-जमुना के मैदान की जैविक विविधता सर्वाधिक असुरक्षित बनी रहेगी। घनी आबादी वाला क्षेत्र होने के कारण इस क्षेत्र में अधिक संरक्षित क्षेत्र स्थापित करने की संभावना शेष नहीं है, इस कमी को प्रकृतिक तालाबों, बागों, नदी-नालों के किनारे स्थित वनस्पति को संरक्षित रखकर पूरा किया जा सकता है।

(4) पश्चिमी घाट, उत्तर-पूर्वी एवं पर्वतीय प्रान्तों एवं अंडमान-निकोबार द्वीपसमूह में राष्ट्रीय उद्यानों की अधिक संख्या सुझायी गयी है क्योंकि इन्हीं क्षेत्रों में अभी भी पर्याप्त जैविक विविधता शेष है।

(5) वांछित संरक्षित क्षेत्रों में राष्ट्र के क्षेत्रफल का 4.6% क्षेत्रफल सन्निहित होगा।

2. जीर्ण प्राकृतवासों (डिग्रडेड हैबीटैट) का स्वास्थ्य-सुधार

इस चरण में, संरक्षित क्षेत्रों की सीमाओं में आने वाले भूभाग की प्रबन्ध योजना बनाकर उसके जीर्ण भाग की पहचान करके राहत पहुँचाने की कार्यवाही होनी है। संरक्षित क्षेत्रों के प्रबन्ध की दो तकनीके हैं— सुरक्षात्मक एवं सुधारात्मक।

सुरक्षात्मक तकनीक के अर्न्तगत आग, पालतू पशुओं का चरान, पेड़ों का कटान, अवैधशिकार, संरक्षित क्षेत्र की सीमाओं में अतिक्रमण की रोकथाम जैसे कार्य आते हैं। यह व्यवस्था स्थायी रूप से समस्त वन्य जीव विहारों एवं राष्ट्रीय उद्यानों के लिए करनी होगी।

सारणी 2

प्रान्त/केन्द्र शासित क्षेत्र	कुल क्षेत्रफल (वर्ग कि०मी०)	उपलब्ध संरक्षित क्षेत्र 1988 तक		वांक्षित संरक्षित क्षेत्रों की न्यूनतम संख्या	
		राष्ट्रीय उद्यान	वन्य जीव विहार	राष्ट्रीय उद्यान	वन्य जीव विहार
1	2	3	4	5	6
आन्ध्र प्रदेश	2777000	0	15	6	25
अरुणाचल प्र०	83000	2	4	9	15
आसाम	78500	1	5	4	22
बिहार	174000	1	16	5	23
गोवा	3800	0	4	1	4
गुजरात	196200	4	11	8	16
हरियाणा	44200	0	1	1	6
हिमांचल प्र०	56000	1	28	3	27
जम्मू-कश्मीर	222200	3	8	7	20
कर्नाटक	191800	3	15	6	25
केरल	38900	3	12	5	18
मध्य प्रदेश	442700	11	31	13	48
महाराष्ट्र	307800	4	23	12	40
मनीपुर	22400	1	0	3	5
मेघालय	22400	2	3	5	6
मिजोरम	21100	0	0	3	6
नागालैण्ड	16500	0	3	1	7
उडीसा	156800	1	21	4	29
पंजाब	50400	0	5	1	9
राजस्थान	340700	2	23	9	35
सिक्किम	7300	1	4	2	8
तमिलनाडु	130100	1	9	8	24
त्रिपुरा	10500	0	2	1	4
उत्तर प्रदेश	294400	4	17	8	30
पश्चिम बंगाल	88800	3	16	4	28
अंडमान-निकोबार	8300	6	94	17	21
चंडीगढ	1000	0	1	0	1
दिल्ली	1500	0	1	0	1
लक्षद्वीप	200	0	0	2	0
		54	372	148	503

सुधारात्मक तकनीक के अन्तर्गत संरक्षित क्षेत्र के उन भागों को अलग से राहत पहुँचायी जाती है जिन्हें पिछले अनेक वर्षों के दुरुपयोग के कारण इतनी क्षति पहुँच चुकी है कि अतिरिक्त राहत के बिना वे अपने प्राकृतिक रूप में नहीं आ सकते। उदाहरणार्थ, यदि घास के मैदान में युकलिप्टस का वृक्षारोपण कर दिया गया है, तब युकलिप्टस को काटकर ही घास के मैदान की मूल वनस्पति एवं पशु-पक्षियों को पुनर्स्थापित किया जा सकता है। इसी प्रकार यदि अत्यधिक चरान के कारण किसी भाग में 'लैण्टाना' (एक विदेशी नस्ल का पौधा) फैल गया है तब उसे उखाड़ करके ही उस क्षेत्र को राहत पहुँचायी जा सकती है। किन्तु यह ध्यान रखना होगा कि सुधार के नाम पर किसी भू-भाग का स्वरूप जैसे घास के मैदान, जल प्लावित क्षेत्र, रेगिस्तानी भूमि, परिवर्तित नहीं किया जाये।

3. लुप्तप्राय वन्य जीवों को पुनर्स्थापित करना

संरक्षित क्षेत्रों की स्थापना एवं प्रबन्ध के बाद भी कुछ लुप्तप्राय वन्यजीवों को बचाना तब तक संभव नहीं होगा जब तक कि उन्हें बाहर से लाकर वहाँ बसाया नहीं जाये। उदाहरणार्थ-- बबरशेर (लायन) अब केवल गीर वनों (गुजरात) में शेष बचा है। उसे उन संरक्षित क्षेत्रों में ले जाकर बसाने की आवश्यकता है जिनमें वह कुछ दशकों पहले पाया जाता था। ऐसे अन्य प्राणियों में हांगुल, मणिपुरी हिरण, उरियल, गैंडा का नाम प्रमुख है, जो अब केवल एक स्थान में जीवित बचे हैं, जब कि पहले ये अन्यत्र पाये जाते थे। ऐसा एक प्रयोग एक सींग वाले भारतीय गैंडों के साथ वर्ष 1984 में प्रारंभ किया गया। ब्रह्मपुत्र घाटी से ले जाकर उत्तर प्रदेश के दुधवा राष्ट्रीय उद्यान में सात गैंडे (5 मादा और 2 नर) लगभग एक शताब्दी के बाद बसाये गये। ये प्राकृतिक रूप से रहने लगे हैं। अन्य लुप्तप्राय वन्य प्राणियों को उन संरक्षित क्षेत्रों में पुनर्स्थापित करने का प्रयास किया जाना है, जिनमें ये पहले पाये जाते थे।

4. प्राणि उद्यानों में प्रजनन योजना चलाना

कुछ ऐसे भी वन्य प्राणी हैं जो प्राकृतिक रूप से संपूर्ण राष्ट्र में जीवित ही नहीं बचे हैं। उदाहरणार्थ, भारतीय चीता। ऐसे जीव अब प्राणि उद्यानों (चिड़ियाघरों) में ही जीवित हैं। इसलिए इन्हें विशेष सुविधायें देकर प्राणि उद्यानों अथवा वनस्पति उद्यानों में पालते हुए इनकी वंश वृद्धि का प्रयास किया जाना है जिससे भविष्य में इन्हें किसी संरक्षित क्षेत्र में पुनर्स्थापित करने की संभावना बनी रहे।

इस प्रकार 'राष्ट्रीय वन्यजीव कार्य योजना' को विभिन्न चरणों में लागू करके जैविक विविधता को संरक्षित करने का प्रयास हमारे देश में चल रहा है। यह गर्व की बात है कि मानव आबादी की समस्याओं से जूझते रहकर भी स्वतंत्र भारत में जैविक विविधता को संरक्षित रखने के लिए आवश्यक भूमि एवं संसाधनों की व्यवस्था उपलब्ध हो रही है। इस दिशा में समाज के सभी वर्गों, पत्रकार, जन प्रतिनिधि, वैज्ञानिक, समाजशास्त्री, जनसाधारण, विद्यार्थी और जनजातियों का सहयोग मिल रहा है। यही कारण है कि निरन्तर संरक्षित क्षेत्रों की संख्या बढ़ती जा रही है।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 32. No. 1, 1989

वाहित मल-जल प्रदूषक एवं उनकी आन्योन्य क्रिया

शिव गोपाल मिश्र, चन्द्र प्रकाश श्रीवास्तव तथा प्रमोद कुमार शुक्ला

शीलाधर मृदा शोध संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जून 1, 1988]

सारांश

वाहित मल-जल एवं शुद्ध जल सिंचाई के साथ 1 तथा 2 ppm Cd एवं Pb का प्रभाव पालक की वृद्धि तथा उपज पर देखा गया। यह पाया गया कि वाहित मल-जल से सिंचाई करने पर पालक की वृद्धि तथा उपज दोनों ही शुद्ध जल सिंचाई करने की तुलना में कम मिली। Pb की अपेक्षा Cd की उपस्थिति में पालक की वृद्धि तथा उपज में ज्यादा कमी आई।

मिट्टी के साथ 0, 10, 20 तथा 50 ppm Cd एवं 0, .25, .50 तथा 1.5% Ca मिलाकर भी प्रेक्षण किये गये। यह देखा गया कि Cd×Ca में विपरीत अन्योन्य क्रिया हुई। इस प्रकार Ca डालकर Cd की विषाक्तता कम की जा सकती है।

Abstract

Sewage pollulants and their interaction. *By* S. G. Misra, C. P. Srivastava and P. K. Shukla, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Allahabad, Allahabad.

Response to the number of leaves, height of plants and yield of spinach grown by irrigating sewage water and tap water after applying 1 and 2 ppm Cd and Pb was observed. It has been found that spinach irrigated with sewage water gave a lesser number of leaves, smaller height of plants and lower yield than tap water irrigated spinach. The growth and yield of spinach was less in presence of Cd than Pb.

Soil treated with 0, 10, 20 and 50 ppm Cd and 0, .25, 0.5 and 1.5% Ca showed an antagonistic interaction between the two. Hence Ca can be used to decrease the toxicity of Cd in sewage water.

हमारे देश में वाहित मल-जल का प्रयोग प्रायः सब्जियों की सिचाई के लिये किया जाता है। यह भली भाँति ज्ञात हो चुका है कि सभी प्रकार के वाहित मल-जल में कुछ भारी तत्व यथा Cd, Pb, Zn, Ni, Co, Cr उपस्थित रहते हैं।[1] फलतः पौधे इन तत्वों का अवशोषण करते रहते हैं। अतः ऐसे जल के प्रयोग से इन तत्वों की पौधे के भीतर उपस्थिति के साथ ही अन्ततोगत्वा पौधों की बढ़वार तथा उपज पर प्रभाव पड़ सकता है।[2,3] स्पष्ट है कि शुद्ध जल से सिंचित तरकारी की फसलों का संघटन तथा उनकी बढ़वार एवं उपज वाहित मल-जल से सिंचाई करने की तुलना में भिन्न होगी। यही नहीं, मल-जल में उपस्थित प्रदूषक तत्वों (Pollutants) के बीच अन्योन्य क्रिया की भी सम्भावना बनी रहती है जिसके कारण पौधों की उपज तथा उनके संघटन पर प्रभाव पड़ सकता है। अभी तक इस दिशा में हमारे देश में कोई शोधकार्य नहीं हुआ एतदर्थ हमने वाहित मल-जल के साथ ही शुद्ध जल से सिंचाई करके एक पत्तेदार सब्जी पालक की बढ़वार, उपज तथा उसके द्वारा तत्व के शोषण का अध्ययन की योजना हाथ में ली है। प्रस्तुत शोध पत्र में उसी से सम्बद्ध परिणाम सूचित किये जा रहे हैं।

प्रयोगात्मक

प्रक्षेत्र की तैयारी

शीलाधर शोध फार्म पर पिछले कई वर्षों से वाहित मल-जल से सिंचाई की जा रही है। हमने इसी फार्म में से 30 वर्गमीटर प्रक्षेत्र का चुनाव किया तथा उसमें यादृच्छिक विधि द्वारा उपचार करके 20 किग्रा० बीज प्रति हेक्टेयर की दर से पालक की बुआई 20 जनवरी 1988 को की। फसल की कटाई 50 दिन बाद की गयी।

उपचार

प्रक्षेत्र में से 1×1मी०^2 क्षेत्रफल के प्लाट बनाकर 1 तथा 2 ppm कैडमियम तथा लेड (विलयन द्वारा) मिलाकर NPK उर्वरकों की 50, 30, 50 किग्रा० मात्रा प्रति हेक्टेयर डाली गई। कैडमियम को कैडमियम क्लोराइड के रूप में एवं लेड को लेड नाइट्रेट के रूप में पानी में घोलकर मिट्टी में मिलाया गया। नाइट्रोजन, फास्फोरस, पोटास को क्रमशः यूरिया, सुपरफास्फेट तथा म्यूरेट आफ पोटास के रूप में मिट्टी में मिलाया गया।

प्लाटों की सिंचाई वाहित मल-जल तथा शुद्ध जल से समय-समय पर की गई। कुल मिलाकर 8 बार सिंचाई की गई।

सारणी 1

पालक पर सिंचाई तथा कैडमियम एवं लेड (सीसा) का प्रभाव

मृदा उपचार	वाहित मल-जल से सिंचाई: पत्तियों की संख्या प्रति पौधा	पौधों की लम्बाई (सेमी०)	हरी पालक का भार (किग्रा०/मी०^2)	शुद्ध जल (पानी) से सिंचाई: पत्तियों की संख्या प्रति पौधा	पौधे की लम्बाई (सेमी०)	हरीपालक का भार (किग्रा०/मी०^2)	शुद्ध जल से सिंचित पालक की अधिक पैदावार (%)
25 दिनों बाद							
0 ppm Cd	7	12		11	17		
1 ,, ,,	5	8		11	16		
2 ,, ,,	6	10		8	16		
1 ,, Pb	8	12		8	18		
2 ,, ,,	8	12		6	19		
50 दिनों बाद							
0 ppm Cd	18	26	4.000	24	37	5.600	28.57
1 ,, ,,	10	18	3.420	21	32	4.440	20.36
2 ,, ,,	10	17	3.080	20	28	4.400	30.00
1 ,, Pb	13	20	3.640	20	28	4.860	20.98
2 ,, ,,	11	20	3.840	18	30	4.700	18.40

सारणी 2

$Cd \times Ca$ की अन्योन्य क्रिया : पालक की फसल में कैडमियम की सान्द्रता

उपचार	शुष्क पालक ग्रा०/ मीटर^2	कैडमियम मिग्रा०/ किलो०	उपचार	शुष्क पालक ग्रा०/ मीटर^2	कैडमियम मिग्रा०/ किलो०
A कैडमियल (0 ppm) + कैल्सियम (0 %)	303	0.18	C कैडमियम (20 pmm) + कैल्सियम (0 %)	303	5.3
A_1 कैडमियम (0 ppm) + कैल्सियम (0.25%)	375	0.13	C_1 कैडमियम (20 ppm) + कैल्सियम (0.25 %)	339	3.6
A_2 कैडमियम (0 ppm) + कैल्सियम (0.50 %)	393	0.21	C_2 कैडमियम (20 ppm) + कैल्सियम (0.5 %)	384	2 8
A_3 कैडमियम (0 ppm) + कैल्सियम (15 %)	420	0.18	C_3 कैडमियम (20 ppm) + कैल्सियम (1.5 %)	392	0.11
B कैडमियम (10 ppm) + कैल्सियम (0 %)	213	1.3	D कैडमियम (50 ppm) + कैल्सियम (0 %)	374	16.32
B_1 कैडमियम (10 ppm) + कैल्सियम (0.25%)	384	1.6	D_1 कैडमियम (50 ppm) + (कैल्सियम 0.25 %)	347	20.31
B_2 कैडमियम (10 ppm) + कैल्सियम (0.50 %)	277	1.2	D_2 कैडमियम (50 ppm) + कैल्सियम (0.50 %)	330	19.46
B_3 कैडमियम (10 ppm) + कैल्सियम (1.5 %)	2.75	0.34	D_3 कैडमियम (50 ppm) + कैल्सियम (1.5 %)	393	2.2

अन्योन्य क्रिया के लिये Cd×Ca का उपचार

कैडमियम को $CdCl_2$ के रूप में 0, 10, 20 एवं 50 ppm की दर से तथा कैल्सियम को $CaCO_3$ के रूप में 0, 0.25, 0.50 एवं 1.5 प्रतिशत के हिसाब से 1 वर्ग मीटर क्षेत्रफल वाले प्लाटों में डालकर पालक की फसल उगाई गई और केवल वाहित मल-जल से उसकी सिंचाई की गई ।

फसल की बढ़वार तथा उपज

पालक के पौधों की लम्बाई तथा प्रति पौधे पर पत्तियों की संख्या 25 तथा 50 दिन बाद ज्ञात की गई । 50 दिन के बाद फसल काट कर उसका हरा भार ज्ञात किया गया ।

कैडमियम का शोषण

हरी फसल काटने के बाद सुखाया गया । Cd×Ca अन्योन्य क्रिया के अन्तर्गत पौधों द्वारा Cd का जितना शोषण हुआ उसे एटामिक एब्जार्प्शन स्पक्ट्रोफोटोमीटर द्वारा ज्ञात किया गया । इसके लिये लखनऊ की औद्योगिक विष अनुसन्धान संस्थान प्रयोगशाला के सहयोग के लिये हम आभारी हैं ।

प्राप्त परिणाम सारणी 1 तथा 2 में अंकित हैं ।

परिणाम तथा विवेचना

सिंचाई जल का पालक की वृद्धि तथा उपज पर प्रभाव

सारणी 1 से स्पष्ट है कि वाहित मल-जल से सिंचाई करने पर पालक की वृद्धि तथा उपज दोनों ही शुद्ध-जल से सिंचाई करने की तुलना में कम रहे ।[4] यह कमी 25 तथा 50 दिन दोनों अवधियों पर लक्षित होती है । इससे पता चलता है कि वाहित मल-जल में अवश्य ही ऐसे तत्व हैं जिससे पालक की बाढ़ तथा पत्तियों की संख्या घटती है । यह ह्रास पत्तियों की लम्बाई तथा संख्या में 50% तथा उपज में 28.5% है ।

जब मिट्टी में 1 या 2 ppm Cd अथवा Pb मिलाकर पालक उगाई गई तो वृद्धि पत्तियों की संख्या तथा उपज में गिरावट आई[5] । प्रारम्भिक 25 दिनों में यह गिरावट उतनी स्पष्ट नहीं है जितनी कि 50 दिनों पर क्योंकि नियन्त्रण की तुलना में लगभग पत्तियों की संख्या आधी, ऊँचाई 4/5 ही रही और उपज में 5-25% की कमी आई । यह द्रष्टव्य है कि Pb की अपेक्षा Cd की उपस्थिति में उपज में ज्यादा कमी आई ।

उपर्युक्त परिणामों से स्पष्ट हो जाता है कि Cd पर Pb की उपस्थिति से ही वाहित मल-जल

से सिंचाई करने पर शुद्ध जल की अपेक्षा कम बढ़वार तथा उपज मिली। अवश्य ही इस मल-जल में 1-2 ppm तक Cd या Pb होने की सम्भावना है।

अन्योन्य क्रिया

सारणी 2 में दिये गये परिणामों से स्पष्ट है कि Cd की तुलना में जहाँ Cd के साथ Ca की बढ़ती हुई मात्रायें डालकर फसल उगाई गई वहाँ उपज में उसी अनुपात में वृद्धि हुई। यह दृष्टव्य है कि प्रति किग्रा० शुष्क भार में उपस्थित Cd की मात्रा, Cd की मात्रा बढ़ाने के साथ ही बढ़ती जाती है। उदाहरणार्थ, 10 ppm Cd पर अवशोषण **1.3** मिग्रा० Cd प्रति किग्रा० शुष्क भार है जबकि 20 तथा 50 ppm Cd पर यह बढ़कर 5.3 तथा 16.32 ppm Cd हो जाता है। Ca डालने से Cd में बहुत ही कम अन्तर आता है। केवल 20 ppm Cd के साथ 0.25-1.5% Ca डालने पर Cd की मात्रा में कमी आई।[6] अधिक Cd होने पर Ca डालने का कोई प्रभाव नहीं पड़ा।

स्पष्ट है कि 20 ppm से अधिक Cd होने पर पौधों में Cd की मात्रा पर Ca का कोई उल्लेखनीय प्रभाव नहीं पड़ेगा। इस तरह Cd की विषाक्तता को Ca डालकर कम किया जा सकता है और उपज में वृद्धि भी। किन्तु इसकी एक सीमा होती है।

ऐसी तरकारियाँ, जहाँ Cd की मात्रा अधिक होगी, उनमें अधिक Cd से युक्त होने के कारण खाने योग्य नहीं होंगी। ऐसी तरकारियों को खाने के पूर्व उनका विश्लेषण होना आवश्यक है।

निर्देश

1. जेरोम ओ० नियागू (सम्पादक) : Cadmium in the Enviroment, Part I, 1980. जान विले एण्ड सन्स
2. जोहन, एम० के०, वान लारहोवन, सी० जे० तथा चाट्ट, एच० एच०, Environ Sci. Tech., 1972, 6, 1005-1009.
3. वान स्कारर, के० तथा स्क्रूप, डब्लू०, Z. Pflanzener nahrung Diing Bodenk, 1936, **43** : 34-43.
4. सुनीघम, जे० डी०, कीने, डी० आर० तथा रान, जे० ए०, J. Environ. Qual. 1975, **4** 460-462
5. रवाँन्स, एस०, इत्यादि, Plant & Soil, 1985, **74**, 87-94.
6. एन्डरसन इत्यादि, Ambio, 1974, **3**, 198-200.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 32. No. 1, 1989

फलन का उसके जैकोबी प्रसार द्वारा सन्निकटम

सुरेश चन्द्र जैन तथा आशुतोष पाठक
गणित अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—नवम्बर 19, 1988]

सारांश

यदि $|\phi(w\pm t)-\phi(w)|=o(t^{\alpha+1/2}\log 1/t)$ ज्यों-ज्यों $t\to o$

$$S_n=\sum_{y=o}^{n} a_y P_y^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=o(\log n) \text{ ज्यों-ज्यों } n\to o$$

$\theta=0$, प्रतिबन्ध $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$ के अन्तर्गत, $\beta\geqslant\frac{1}{2}$ तो हम इस प्रमेय का सार्वीकरण कर सकते हैं।

Abstract

Approximation of a function by its Jacobi expansion. *By* Suresh Chandra Jain and Ashutosh Pathak, School of Studies in Mathematics, Vikram University, Ujjain.

If $|\phi(w\pm t)-\phi(w)|=o(t^{\alpha+1/2}\log 1/t)$ as $t\to o$

$$S_n=\sum_{y=o}^{n} a_y P_y^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=o(\log n) \text{ as } n\to\infty$$

$\theta=0$ in condition $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$; $\beta\geqslant-\frac{1}{2}$.

We intend to generalize the above theorem in this paper.

1. माना कि $f(x)$ एक ऐसा (L) माप्य फलन है जिससे कि फलन

$$(1-x)^{\alpha}\ (1+x)^{\beta} f(x) \in L\,[-1,\,1]\ \alpha>-1,\ \beta>-1$$

फलन $f(x)$ के संगत जैकोबी श्रेणी (1.1)

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{1.1}$$

है जहाँ

$$a_n = g_n \int_{-1}^{+1} (1-t)^{\alpha}\ (1+t)^{\beta}\ P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\, f(t)\, dt$$

तथा

$$g_n = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)\ \Gamma(n+1)\ \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\ \Gamma(n+\alpha+1)\ \Gamma(n+\beta+1)} \tag{1.2}$$

$$=2^{-\alpha-\beta-1}\, n$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ जैकोबी बहुपद है ।

$x=\cos\theta$ तथा $t=\cos w$ रखने पर हमें फलन $f(\cos\theta)$ के संगत जैकोबी श्रेणी प्राप्त होती है ।

हम लिखेंगे

$$\phi\,(w)=\{f(\cos w-A\}$$

जहाँ A के अचर है ।

गुप्ता तथा साहनी[1] ने परागोलीय श्रेणी के लिये निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है ।

प्रमेय A

यदि

$$\phi\,(w\pm t)-\phi\,(w)|=o\left(t^{\lambda}\log\frac{1}{t}\right), \text{ ज्यों-ज्यों } t\to o \tag{1.3}$$

तब

$$S_n = o\log\,(n)$$

बशर्ते कि $o<\leqslant\frac{1}{2}$ ।

हाल ही में एस० के० शर्मा ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है ।

प्रमेय B

यदि

$$|\phi(w+t)-\phi w)|=o\left(t^{\alpha+1/2}\log\frac{1}{t}\right) \text{ ज्यों-ज्यों } t\to o$$

$$S_n=\sum_{\gamma=o}^{n} a_\gamma P_\gamma^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=o(\log n) \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty$$

$\theta=o$ प्रतिबन्ध $\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$ में; $\beta\geqslant-\frac{1}{2}$ ।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम उपर्युक्त प्रमेय का सार्वीकरण करना चहते हैं अर्थात् हम निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करना चाहते हैं ।

प्रमेय

यदि

$$|\phi(w+t)-\phi(w)|=o\left[t^{\alpha+1/2}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\mu}\right] \text{ ज्यों-ज्यों } t\to o \tag{1.4}$$

तो $\theta=0$ पर $S_n=\sum_{\gamma=o}^{n} a_\gamma P_\gamma^{\alpha,\beta}(\cos\theta)=o(\log n)^{\mu}$ ज्यों-ज्यों $n\to\infty$

बशर्ते कि $-1/2<\alpha<\frac{1}{2}$; $\beta\geqslant-\frac{1}{2}$, तथा $\mu>o$ ।

शर्मा का प्रमेय हमारे प्रमेय की $\mu=1$ के लिये विशिष्ट दशा है ।

2. प्रमेय की उपपत्ति के लिये निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी ।

प्रमेयिका 1

माना कि α तथा β यादृच्छिक तथा वास्तविक हैं तथा c एक स्थिर अचर है $n\to\infty$, तो

$$P_n^{(\alpha,\beta)}\cos\theta=\begin{cases} o^{-\alpha-1/2}\, o(n^{-1/2})\,; \frac{c}{n}\leqslant\theta\leqslant\pi/2 \\ o(n^{\alpha});\ o\leqslant\theta\leqslant\frac{c}{n}\end{cases} \tag{2.1}$$

प्रमेयिका 2

$c/n \leqslant \theta \leqslant \pi - c/n$ के लिये

$$P_n^{(\alpha,\beta)} \cos\theta = n^{-1/2} K(\theta) \left[\cos\left\{\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\theta+\gamma\right\}+\frac{o(1)}{n\sin\theta}\right] \tag{2.2}$$

$$K(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\sin\theta/2)^{-\alpha-1/2} (\cos\theta/2)^{-\beta-1/2};\ \gamma = -(\alpha+\tfrac{1}{2})^{\pi/2}$$

3. प्रमेय की उपपत्ति

$x = \cos\theta$ के लिये श्रेणी (1.1.1) के nवें आंशिक योगफल को निम्नवत् व्यक्त किया जाता है।

$$S_n(\cos\theta) = \sum_{\gamma=0}^{n} a_\gamma P_\gamma^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \int_0^\pi \left(\sin\frac{w}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1} f(\cos w)$$

$$. \sum_{\gamma=0}^{n} g_\gamma P_\gamma^{(\alpha,\beta)}(\cos o) P_\gamma^{(\alpha,\beta)}(\cos w)\, dw$$

$$S_n(1) = 2^{\alpha+\beta+1} \int_0^\pi \left(\sin\frac{w}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1} f(\cos w)$$

$$. \sum_{\gamma=0}^{n} g_\gamma P_\gamma^{(\alpha,\beta)}(1) P_\gamma^{(\alpha,\beta)}(\cos w)\, dw$$

अतः

$$S_n(1) - A = 2^{\alpha+\beta+1} \int_0^\pi \left(\sin\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1} \phi(w)\, m_n P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos w)\, dw$$

जहाँ

$$m_n = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}\, \Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma\alpha+1\ \Gamma(n+\beta+1)} \simeq \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma\alpha+1} n^{\alpha+1}$$

$$S_n(1) - A \int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\pi-1/2} + \int_{\pi-1/2}^{\pi}$$

$$= S_{n\cdot1} + S_{n\cdot2} + S_{n\cdot3},\ \text{माना}$$

जहाँ

$$S_{n\cdot 1}=2^{\alpha+\beta+1}\int_{c}^{1/n}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1}\phi(w)\; m_n\, P_n^{(\beta+1\cdot\beta)}(\cos w)\, dw$$

$$=o(n^{2\alpha+3})\int_{c}^{1/n} w^{2\alpha+1}\,|\bar{\phi}(w)|\, dw \quad (2.1) \text{ से}$$

$$=o\;(n^{2\alpha+2})\int_{o}^{1/n} w^{2\alpha+1}\, w^{\alpha+1/2}\left(\log\frac{1}{w}\right)^{\mu} dw$$

$$=o\;(n^{2\alpha+2})\;(\log n)^{\mu}\int_{o}^{1/n} w^{3\alpha+5/2}\, dw$$

$$=\;(n^{2\alpha+2}\; n^{-3-5/2})\;(\log n)^{\mu}$$

$$=o\;(n^{-\alpha-1/2}\;(\log n)^{\mu})=o\;(\log n)^{\mu} \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty$$

$S_{n\cdot 3}$ पर विचार करते हुये हम निम्नलिखित सम्बन्ध का प्रयोग करते हैं—

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x)$$

और देखते हैं कि

$$S_{n\cdot 3}=2^{\alpha-\beta-4}\int_{\pi-1/2}^{\pi}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1}\phi(w)\; m_n\, P_n^{(\alpha,1\beta)}(\cos w)\, dw$$

$$=o\;\int_{o}^{1/n}\left|\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1}\phi(\pi-w)\right| n^{\alpha+1}\, n^{\beta}\, dw$$

$$=o(n^{\alpha+\beta+1})\int_{o}^{1/n} w^{2\beta+1}\, dw$$

$$=o\;(n^{-\alpha-\beta-1})$$

$$=o\;(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty \alpha<\tfrac{1}{2};\ \beta\geqslant-\tfrac{1}{2} \text{ के लिये} \qquad (3.2)$$

अन्ततः परास $1/n\leqslant w\leqslant\pi-1/n$, के लिये हम $P_n^{[\alpha,\beta}(\cos\theta)$ के लिये उपगामी व्यंजक का प्रयोग करते हैं जो (1.2.2) में दिया हुआ है।

हमें ज्ञात है कि

$$S_{n\cdot 2}=2^{\alpha+\beta+1}\int_{1/n}^{\pi-1/2}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1}\phi(w)\; m_n\, P_n^{\alpha+1,\beta}\;(\cos w)\, dw$$

$$=B\int_{-1/n}^{\pi-1/2}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2\beta+1}\phi(w)\left[n^{\alpha+1}\, n^{-1/2}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{-\alpha-3/2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{-\beta-1/2}\cos\left\{\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)w+\gamma\right\}+o(1)\,(n\sin w)^{-1}\right]dw$$

जहाँ B अचर है।

$$=B\,(n^{\alpha+1/2})\int_{1/n}^{\pi-1/n}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{\alpha-1/2}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{\beta+1/2}\phi(w)$$

$$\left[\cos\gamma\cos\left(n+\frac{a+p}{2}+1\right)w+\sin\gamma\sin\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)w+o(1)\right.$$

$$\left.\cdot\,(n\sin w)^{-1}\right]dw$$

$$=S_{n\cdot 2\cdot 1}+S_{n\cdot 2\cdot 2}+S_{n\cdot 2\cdot 3},\text{ माना}$$

जहाँ

$$S_{n\cdot 2\cdot 1}=B\,(n^{\alpha+1/2})\int_{1/n}^{\pi-1/n}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{\alpha-1/2}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{\beta+1/2}$$

$$\cos\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)w\,\phi(w)\,dw$$

$$=\frac{B}{2}\,(n^{\alpha+1/2})\left[\int_{1/n}^{\pi-1/n}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{\alpha-1/2}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{\beta+1/2}\right.$$

$$\left(\cos n-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)w\,\phi(w)\,dw$$

$$-\int_{1/n-\lambda_n}^{\pi-1/n-\lambda_n}\left(\sin\frac{w+n}{2}\right)^{\alpha-1/2}\cos\left(\frac{w+n}{2}\right)^{\beta+1/2}\phi(w+n)$$

$$\left.\cdot\cos\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)w\,dw\right]$$

$$=B\,(n^{\alpha+1/2})(J_1+J_2+J_3+J_4);\;\lambda_n=\frac{\pi}{n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1}$$

$$|J_1| \leqslant \int_{\pi-1/n-\lambda_n}^{\pi-1/n} \left| \sin\frac{w}{2}\right)^{\alpha-1/2} \left(\cos\frac{w}{2}\right)^{\beta+1/2} \phi(w) \right| dw$$

$$= \int_{o}^{\lambda_n} w^{\beta+1/2}\, dw$$

$$= o\,(n^{-\beta-3/2}) \qquad (3.3)$$

जहाँ

$$|J_2| = \int_{1/n-\lambda_n}^{1/n} \left| \left(\sin\frac{w+n}{2}\right)^{\alpha-1/2} \left(\cos\frac{w+n}{2}\right)^{\beta+1/2} \phi(w+n) \right| dw$$

$$= o \int_{1/n-\lambda_n}^{1/n} w^{\alpha-1/2}\, w^{\alpha+1/2} \left[\log\left(\frac{1}{w+n}\right)\right]^{\mu} dw$$

$$= o\,[n^{-2\alpha-1} (\log n)^{\mu}] = o((\log n)^{\mu}) \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty. \qquad (3.4)$$

$$|J_3| = \int_{1/n}^{\pi-1/n-\lambda_n} \left| \left(\sin\frac{w+n}{2}\right)^{\alpha-1/2} \left(\cos\frac{w+n}{2}\right)^{\beta+1/2} \right| |\phi(w+n) - \phi(w)|\, dw$$

$$= o\left[n^{\alpha+1/2}\left(\log\frac{1}{n}\right)^{\mu}\right] \int_{1/n}^{\pi-1/n-\lambda_n} \left| \left(\sin\frac{w+n}{2}\right)^{\alpha-1/2} \left(\cos\frac{w+n}{2}\right)^{\beta+1/2} \right| dw$$

$$= o\,[^{-\alpha-1/2} (\log n)^{\mu}] \text{ ज्यो-ज्यों } n \to \infty. \qquad (3.5)$$

अन्त में

$$|J_4| = \int_{1/n}^{\pi-1/n-\lambda_n} |\phi(w)| \left| \left(\sin\frac{w+n}{2}\right)^{\alpha-1/2} \left(\cos\frac{w+n}{2}\right)^{\beta+1/2} - \left(\sin\frac{w}{2}\right)^{\alpha-1/2} \left(\cos\frac{w}{2}\right)^{\beta+1/2} \right| dw$$

$$= o\,(n) \int_{1/n}^{\pi-1/n-\lambda_n} |\phi(w)| \frac{d}{dw} \left\{ \left(\sin\frac{w}{2}\right)^{\alpha-1/2} \left(\cos\frac{w}{2}\right)^{\beta+1/2} \right\} dw$$

$$= o\,(n^{-1}) \qquad (3.6)$$

(1.3.3)...(1.3.6) को जोड़ने पर

$$S_{n \cdot 2 \cdot 1} = (n^{\alpha+1/2}) \{o\,(n^{-\alpha-1/2} \log n) + o\,(n^{-\beta-3/2})\}$$

$$= n\,[(\log n)^{\mu}] + o\,(n^{\alpha-\beta-1})$$

$$= n\,[(\log n)^{\mu} \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty \qquad (3.7)$$

$S_{n \cdot 2 \cdot 2}$ तथा $S_{\cdot n_2 \cdot 3}$ के क्रम आकल को o (1) तक देखा जा सकता है ।

$$S_{n \cdot 2} = o\,[(\log n)^{\mu}];\ \text{ज्यों-ज्यों}\ n \to \infty \tag{3.8}$$

अब (1·3.1), (1.3.2) एवं (1.3.8) के बल पर

$$S_n = o\,[(\log n)^{\mu}],\ \text{ज्यों-ज्यों}\ n \to \infty \tag{3.9}$$

इस तरह प्रमेय पूरी तरह स्थापित हो गई है ।

निर्देश

1. गुप्ता, डी० पी० तथा साहनी, बी० एन०, The Math. Student, 1987, XL II, 337-343.

2. जेगो, जी०, Orthogonal Polynomial, Amer. Math. Soc. Colleg. Publ., नई दिल्ली, 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 32. No. 1, 1989

कई संमिश्र चरों वाला H फलन तथा उष्मा संचालन

एस० एल० नाहटा

गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, बाडमेर (राजस्थान)

[प्राप्त—अगस्त 22, 1986]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य उष्मा संचालन के निर्मेय से सम्बद्ध आंशिक अवकल समीकरण का हल प्राप्त करने के लिये कई संमिश्र चरों वाले H-फलन का उपयोग करना है।

Abstract

Heat conduction and the *H*-function of several complex variables. *By* S. L. Nahta Department of Mathematics, Government College, Barmer (Rajasthan).

The object of this paper is to make use of the H-function of several complex variables in obtaining a solution of the partial differential equation related to a problem of heat conduction.

1. श्रीवास्तव तथा पंडा[11] ने कई संमिश्र चरों वाले H-फलन की परिभाषा बहुगुण मेलिन-बार्नीज समाकल के रूप में निम्नवत् की है

$$H[z_1, \ldots, z_r] = H^{o,o:(V',W');\ldots;(V^{(r)},W^{(r)})}_{p,q[X',Y'];\ldots;[X^{(r)};Y^{(r)}]} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \right| \begin{matrix} \{(a_p; \alpha'_p, \ldots, \alpha^{(r)}_p)\} : \{(A'_{X'}, H'_{X'})\}; \ldots; \{(A^{(r)}_{X^{(r)}}, H^{(r)}_{X^{(r)}})\} \\ \{(b_q; \beta'_q, \ldots, \beta^{(r)}_q)\} : \{(B'_{Y'}, K'_{Y'})\}; \ldots; \{(B^{(r)}_{Y^{(r)}}, K^{(r)}_{Y^{(r)}})\} \end{matrix} \right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi w)^r}\int_{L_1}\cdots\int_{L_r}\phi_1(s_1)\ldots\phi_r(s_r)\,\phi'(s_1,\ldots,s_r)$$

$$.\,z_1^{s_1}\ldots z_r^{s_r}\,ds_1\ldots ds_r,\; w=\sqrt{-1}, \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\phi_i(s_i)=\frac{\prod_{j=1}^{V^{(i)}}\Gamma(B_j^{(i)}-K_j^{(i)}s_i)\prod_{j=1}^{W^{(i)}}\Gamma(1-A_j^{(i)}+H_j^{(i)}s_i)}{\prod_{j=V^{(i)}+1}^{Y^{(i)}}\Gamma(1-B_j^{(i)}+K_j^{(i)}s_i)\prod_{j=W^{(i)}+1}^{X^{(i)}}\Gamma(A_j^{(i)}-H_j^{(i)}s_i)}$$

$$i=1,\ldots\ldots,r \tag{1.2}$$

$$\phi'(s_1,\ldots,s_r)=\left[\prod_{j=1}^{q}\Gamma(1-b_j+\sum_{i=1}^{r}\beta_j^{(i)}s_i)\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j-\sum_{i=1}^{r}\alpha_j^{(i)}s_i)\right]^{-1} \tag{1.3}$$

(1.1) में बहुगुण समाकल परम अभिसारी होता है यदि

$$|\arg(z_i)|<\tfrac{1}{2}U_i\,\pi,\; i=1,\ldots,r \tag{1.4}$$

जहाँ

$$U_i=-\sum_{j=1}^{p}\alpha_j^{(i)}-\sum_{j=1}^{q}\beta_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{V^{(i)}}K_j^{(i)}-\sum_{j=V^{(i)}+1}^{Y^{(i)}}K_j^{(i)}$$

$$+\sum_{j=1}^{W^{(i)}}H_j^{(i)}-\sum_{j=W^{(i)}+1}^{X^{(i)}}H_j^{(i)}>0,\; i=1,\ldots,r \tag{1.5}$$

निम्नलिखित प्रसार सूत्र[7,9]

$$H^*[y_1,\ldots,y_r]=H^{o,o\,:\,(1,N');\ldots;(1,N^{(r)})}_{P,Q\,:\,[P',Q'+1];\ldots;[P^{(r)},Q^{(r)}+1]}\left[\begin{matrix}y_1\\ \vdots\\ y_r\end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix}\{(e_P;E'_P,\ldots,E^{(r)}_P)\}\;\ldots\;\{(C'_{P'},T'_{P'})\};\ldots;\{(C^{(r)}_{P^{(r)}},T^{(r)}_{P^{(r)}})\}\\ \{(f_Q;F'_Q,\ldots,F^{(r)}_Q)\}:(D'_o,\delta'_o),\{(D'_{Q'},\delta'_{Q'})\};\ldots;(D^{(r)}_o,\delta^{(r)}_o),\{(D^{(r)}_{Q^{(r)}},\delta^{(r)}_{Q^{(r)}})\}\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{\delta_0^{1}\ldots\delta_0^{(r)}}\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_r=0}^{\infty}\phi(\rho_{\nu_1},\ldots,\rho_{\nu_r})\prod_{i=1}^{r}\left\{\theta_i(\rho_{\nu_i})\frac{(-1)^{\nu_i}}{\nu_i!}y_i^{\rho\nu_i}\right\},$$

$$\rho\nu_i=\frac{D_0^{(i)}+\nu_i}{\delta_0^{(i)}},\ w=\sqrt{-1}, \tag{1.6}$$

जहाँ

$$\theta_i(s_i)=\frac{\prod_{j=1}^{N^{(i)}}\Gamma(1-C_j^{(i)}+T_j^{(i)}s_i)}{\prod_{j=1}^{Q^{(i)}}\Gamma(1-D_j^{(i)}+\delta_j^{(i)}s_i)\prod_{j=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}}\Gamma(C_j^{(i)}-T_j^{(i)}s_i)},\ i=1,r, \tag{1.7}$$

तथा

$$\phi(s_1,\ldots,s_r)=\left[\prod_{j=1}^{P}\Gamma(e_j-\sum_{t=1}^{r}E_j^{(i)}s_i)\prod_{j=1}^{Q}\Gamma(1-f_j+\sum_{i=1}^{r}F_j^{(i)}s_i)\right]^{-1} \tag{1.8}$$

वशर्ते

$$|\arg y_i|<\tfrac{1}{2}V_i\pi,\ V_i>0,\ i=1,\ldots,r, \tag{1.9}$$

तथा

$$V_i=-\sum_{j=1}^{P}E_j^{(i)}-\sum_{j=1}^{Q}F_j^{(i)}+\delta_0\sum_{j=1}^{Q^{(i)}}\delta_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{N^{(i)}}T_j^{(i)}$$

$$-\sum_{j=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}}T_j^{(i)}>0,\ i=1,r. \tag{1.10}$$

2. अनन्त समाकल

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2\sigma}e^{-x^2}H_{2\nu}(x)\,H^*[y_1x^{2h_1},\ldots,y_rx^{2h_r}]\,H[z_1x^{2k_1},\ldots,z_rx^{2k_r}]\,dx$$

$$=\sum_{\nu_1,\ldots\nu_r=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}\,2^{2(\nu-\sigma-\sum_{i=1}^{r}\rho\nu_i h_i)}}{\delta_0^{'}\ldots\delta_0^{(r)}}\phi(\rho_{v1},\ldots,\rho_{vr})$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{r} \left\{ \theta_i (\rho v_i) \frac{(-1)^{v_i}}{v_i !} y_i^{\rho v_i} \right\} H^{0,1 : (V', W'); \ldots; (V^{(r)}, W^{(r)})}_{p+1, q+1 : [X', Y']; \ldots; [X^{(r)}, Y^{(r)}]}$$

$$\left[\begin{array}{c|l} 2^{-2k_1} z_1 & \{(a_p; \alpha'_p, \ldots, \alpha_q^{(r)})\}, (-2\sigma - 2\sum_{i=1}^{r} h_i \rho v_i; 2k_1, \ldots, 2k_r) : \\ \ldots & \\ 2^{-2k_r} z_r & \{(b_q; \beta'_q, \ldots, \beta_q^{(r)})\}, (v - \sigma - \sum_{i=1}^{r} h_i \rho v_i; k_1, \ldots, k_r) : \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \{(A'_{X'}, H'_{X'})\}; \ldots; \{(A^{(r)}_{X^{(r)}}, H^{(r)}_{X^{(r)}})\} \\ \{(B'_{Y'}, K'_{Y'})\}; \ldots; \{(B^{(r)}_{Y^{(r)}}, K^{(r)}_{Y^{(r)}})\} \end{array} \right] \tag{2.1}$$

बशर्ते कि

$$h_1, \ldots, h_r > 0,\ k_1, \ldots, k_r > 0,\ \sigma > 0,$$

$$Re\,(1 + \sum_{i=1}^{r} (h_i \rho v_i + k_i B_j^{(i)} / K_j^{(i)}) > 0,\ j = 1, \ldots, V^{(i)},$$

$$i = 1, \ldots, r,\ |\arg (z_i)| < \tfrac{1}{2} U_i \pi,\ U_i > 0,\ i = 1, \ldots, r,$$

$$|\arg (y_i)| < \tfrac{1}{2} V_i \pi,\ V_i > 0,\ i = 1, \ldots, r.$$

समाकल सूत्र (2.1) की स्थापना (1.1), (1.6) तथा निम्नलिखित समाकल का उपयोग करके की जा सकती है ।

$$\int_{-}^{\infty} x^{2\sigma} e^{-x^2} H_2 v(x)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{2(v-\sigma)}\, \Gamma(2\sigma + 1)}{(1 + \sigma - v)},\ v = 0, 1, 2, \ldots$$

3. उष्मा संचालन में सम्प्रयोग

भोंसले[1] ने आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial \phi}{\partial \phi} = K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - K \phi\, x^2, \tag{3.1}$$

के हल करने में हर्माइट बहुपदियों का प्रयोग किया है जहाँ $\phi\,(x, t)$ वृहद मान के लिये शून्य की ओर अग्रसर होता है और जब $|x| \to \infty$ तो यह समीकरण उष्मा संचालन की समस्या

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - h_1 (\phi - \phi_0) \tag{3.2}$$

से सम्बद्ध रहता है बशर्ते कि

$$\phi_0=0 \text{ तथा } h_1=Kx$$

भोंसले[1] ने समीकरण (3.1) का जो हल प्रस्तुत किया है वह इस प्रकार है

$$\phi(x, t)=\sum_{\alpha=0}^{\infty} T_\alpha\, e^{-(1+2\alpha)Kt-x^2/2} H_\alpha(x) \tag{3.3}$$

हम एक फलन $\phi(x, t)$ के निश्चयन की समस्या पर विचार करेंगे । यह फलन ऐसा है कि

$$\phi(x, 0)=x^{2\sigma} e^{-x^2} H^*[y_1 x^{3h_1}, \ldots, y_r x^{2h_r}]\, H[z_1 x^{2k_1}, \ldots, z_r x^{2k_r}] \tag{3.4}$$

अब (3.3) तथा (3.4) से

$$x^{2\sigma} e^{-x^2} H^*[y_1 x^{2h_1}, \ldots, y_r x^{2h_r}]\, H[z_1 x^{2k_1}, \ldots, z_r x^{2k_r}]$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty} T_\alpha\, e^{-x^2/2} H_\alpha(x) \tag{3.5}$$

(3.5) के दोनों पक्षों में $H_\beta(x)$ से गुणा करने तथा x के प्रति $-\infty$ से ∞ तक समाकलित करने और (2.1) एवं हर्माइट बहुपदियों के लाम्बिकता गुण[5] का उपयोग करने पर

$$T_\beta=\sum_{v_1, \ldots, v_r=0}^{\infty} \frac{2^{\beta-2\sigma-2\sum_{i=1}^{r} \rho v_i^{h_t}-\frac{1}{2}}}{(\delta_0' \ldots \delta_0^{(r)})\,\beta!}\, \phi(\rho v_1, \ldots, \rho v_r)$$

$$\cdot \prod_{i=0}^{r}\left\{\theta_i(\rho v_i)\frac{(-1)^{v_i}}{v_i!} y_i^{\rho v_i}\right\}$$

$$\cdot H^{0,1:(V', W'); \ldots; (V^{(r)}, W^{(r)})}_{p+1, q+1:[X', Y']; \ldots; [X^{(r)}, Y^{(r)}]}\left[\begin{matrix}2^{-2k_1}z_1\\ \ldots\\ 2^{-2k_r}z_r\end{matrix}\right|$$

$$\{(a_p; \alpha_p', \ldots, \alpha_p^{(r)})\}, \left(-2\sigma-2\sum_{i=1}^{r} h_i \rho v_i: 2k_1, \ldots, 2k_r\right):$$

$$\{(b_q; \beta_q', \ldots, \beta_q^{(r)})\}, \left(\beta/2-\sigma-\sum_{i=1}^{r} h_i \rho v_i; k_1, \ldots, k_r\right):$$

$$\left.\begin{matrix}\{(A'_{X'}, H'_{X'})\}; \ldots; \{(A^{(r)}_{X^{(r)}}, H^{(r)}_{X^{(r)}})\}\\ \{(B'_{Y'}, K'_{Y'})\}; \ldots; \{(B^{(r)}_{Y^{(r)}}, K^{(r)}_{Y^{(r)}})\}\end{matrix}\right] \tag{3.6}$$

इस तरह (3.3) का हल निम्नलिखित रूप में समानीत हो जाता है—

$$\phi(x, t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_r=0}^{\infty} \frac{2^{\alpha-2\sigma-2\sum_{i=0}^{r} \rho\nu_i h_i - \frac{1}{2}}}{(\delta_0' \ldots \delta_0^{(r)})\, \alpha\,!}$$

$$\cdot\, \phi(\rho\nu_1, \ldots, \rho\nu_r) \prod_{i=1}^{r} \left\{ \theta_i(\rho\nu_i) \frac{(-1)^{\nu_i}}{\nu_i\,!} y_i^{\rho\nu_i} \right\} \cdot e^{-(1+2\alpha)kt-x^2/2}$$

$$\cdot\, H^{0,1\,:\,(V', W');\, \ldots;\, (V^{(r)}, W^{(r)})}_{p+1,\, q+1\,:\,[X', Y'];\, \ldots;\, [X^{(r)}, Y^{(r)}]} \left[\begin{matrix} 2^{-2k_1} z_1 \\ \cdots \\ 2^{-2k_r} z_r \end{matrix} \right|$$

$$\{(a_p; \alpha_p', \ldots, \alpha_p^{(r)})\}, \left(-2\sigma - 2\sum_{i=1}^{r} h_i \rho\nu_i; 2k_1, \ldots, 2k_r\right);$$

$$\{(b_q; \beta_q', \ldots, \beta_q^{(r)})\}, \left(\alpha/2 - \sigma - \sum_{i=1}^{r} h_i \rho\nu_i; k_1, \ldots; k_r\right) :$$

$$\left. \begin{matrix} \{(A_{X'}', H_{X'}')\}; \ldots; \{(A_{X^{(r)}}^{(r)}, H_{X^{(r)}}^{(r)})\} \\ \{(B_{Y'}', K_{Y'}')\}; \ldots; \{(B_{Y^{(r)}}^{(r)}, K_{Y^{(r)}}^{(r)})\} \end{matrix} \right] \qquad (3.7)$$

4. प्रसार सूत्र

हम (3.5) तथा (3.6) की सहायता से निम्नलिखित प्रसार सूत्र की स्थापना करेंगे—

$$x^{2\sigma} e^{-x^2} H^*[y_1 x^{2h_1}, \ldots, y_r x^{2h_r}]\, H[z_1 x^{2k_1}, \ldots, z_r x^{2k_r}]$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_r=0}^{\infty} \frac{2^{\alpha-2\sigma-2\sum_{i=1}^{r} \rho\nu_i h_i - \frac{1}{2}}}{(\delta_0' \ldots \delta_0^{(r)})\, \beta\,!} \phi(\rho\nu_1, \ldots, \rho\nu_r)$$

$$\prod_{i=1}^{r} \left\{ \theta_i(\rho\nu_i) \frac{(-1)^{\nu_i}}{\nu_i\,!} y_i^{\rho\nu_i} \right\} H^{0,1\,:\,(V', W');\, \ldots,\, (V^{(r)}, W^{(s)})}_{p+1,\, q+1\,:\,[X', Y'],\, X^{(r)}, Y^{(r)}]} \left[\begin{matrix} 2^{-2k_1} z_1 \\ \cdots \\ 2^{-2k_r} z_r \end{matrix} \right|$$

$$(a_p; \alpha'_p, \ldots, \alpha_p^{(r)}), (-2\sigma - 2\sum_{i=1}^{r} h_i \rho v_i; 2k_1, \ldots, 2k_r);$$

$$(b_q; \beta'_q, \ldots, \beta_q^{(r)}), a/2 - \sigma - \sum_{i=1}^{r} h_i \rho v_i; k_1, \ldots, k_r):$$

$$\left.\begin{matrix} \{(A'_{X'}, H'_{X'})\}; \ldots; \{(A_{X^{(r)}}^{(r)}, H_{X^{(r)}}^{(r)})\} \\ \{(B'_{Y'}, K'_{Y'})\}; \ldots; \{(B_{Y^{(r)}}^{(r)}, K_{Y^{(r)}}^{(r)})\} \end{matrix}\right]$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० ए० एन० गोयल का आभारी है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में समुचित मार्ग-दर्शन किया।

निर्देश

1. भोंसले, बी० आर०, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1966, **36**, A 359-360.
2. चर्चिल, आर० वी०, Operational Mathematics Mc Graw-Hill, New York. 1958.
3. चौरसिया, वी० बी० एल०, Acta Cien. Indica, 1978, **2**, 425-427.
4. चौरसिया, वी० बी० एल० तथा शर्मा, एस० सी०, ज्ञानाभ, 1983, **13**, 39-46.
5. एर्डेल्यी, ए०, इत्यादि, Tables of Integral Transforms, भाग II, Mc Graw-Hill, New York, 1954.
6. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, Macmillan, New York, 1960.
7. मुखर्जी, एस० एन० तथा प्रसाद, वाई० एन०, Math. Education, 1971, **5**, 5-12.
8. प्रसाद, वाई० एन० तथा सिंह, ए० के०, Pure Appl. Math. Sci., 1977, **6**, 57-64.
9. सक्सेना, आर० के०, Kyungyook Math. J., 1977, **17**, 221-226.
10. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, The *H*-function of One and Two Variables with Applications, South Asian Publishers, New Delhi and Madras, 1982.
11. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पण्डा, आर०, J. Reine Angew. Math., 1976, **283/284**, 265-274.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 32, No. 1, 1989

करमट विधि से लिपशिट्ज वर्ग के फलनों की सन्निकटन कोटि

आर० पी० गुप्ता, एस० के० वर्मा तथा वेद प्रकाश
गणित विभाग, शासकीय इंजीनियरिंग कालेज, बिलासपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—फरवरी 17, 1986]

सारांश

हमने करमट विधि से सन्निकटन कोटि प्राप्त किया है । हमारा परिणाम प्रेमचन्द्र के परिणाम जैसा है ।

Abstract

On the degree of approximation of functions belonging to the Lipshitz class by Karamata method. *By* R. P. Gupta, S. K. Verma and Ved Prakash, Department of Mathematics, Government Engineering College, Bilaspur (M. P.).

In the present paper we have obtained the degree of approximation by Karamata method. Our result is analogous to the result of Chandra[1,2].

1, श्रेणी $\Sigma\ a_n$ आंशिक योगफलों के अनुक्रम $\{S_v\}$ समेत करमट विधि-k^λ, $\lambda>o$ द्वारा संकलनीय कही जाती है यदि अनुक्रम

$$S_n^\lambda=\left\{\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+n)}\sum_{v=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\v\end{bmatrix}\lambda^v S_v\right\} \tag{1.1}$$

अभिसारी हो जाता है जहाँ $\begin{bmatrix}n\\v\end{bmatrix}$ संख्याओं को

$$x\,(x+1)\,(x+2)\,\ldots\,(x+n-1)=\sum_{v=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\v\end{bmatrix}x^v, \tag{1.2}$$

$$n=0, 1, 2, \ldots, o \leqslant \nu \leqslant n$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है तथा संख्यायें $\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}$ प्रथम प्रकार की स्टर्लिंग संख्याओं के निरपेक्ष मान हैं ।

K^{λ} विधि का सूत्रपात सर्वप्रथम करमट[3] द्वारा किया गया जिसने दिखाया है कि यह विधि $\lambda > o$ के लिये नियमित है । माना f 2π-आवर्ती तथा $(-\pi, \pi)$ में L-समाकलनीय है तब x बिन्दु पर f से सम्बद्ध फूरियर श्रेणी को

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.3}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

फलन $f \in \text{Lip}\ \alpha\ (\alpha > o)$ यदि

$$f(x+h) - f(x) = O\ (|h^{\alpha}|) \tag{1.4}$$

हम लिखेंगे कि

$$\phi_x\ (t) = \frac{1}{2}\left\{ f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \right\} \tag{1.5}$$

तथा

$$K_n\ (t) = \frac{I_m \{e^{it/2}\ \Gamma(\lambda\ e^{it} + n)/\Gamma(\lambda\ e^{it})\}}{\Gamma(\lambda + n) \sin t/2} \tag{1.6}$$

जहाँ I_m काल्पनिक अंश का सूचक है ।

2. लिपशिट्ज वर्ग के फलनों की सन्निकटन कोटि के विषय में प्रेमचन्द ने[1,2] बोरेल-माध्यों तथा (E, q) माध्यों के द्वारा परिणाम प्राप्त किया है । वुकोविक ने[4] K^{λ} विधियों की फूरियर-प्रभावात्मकता के सम्बन्ध में सकारात्मक परिणाम सिद्ध किया है । यह बतलाया गया है कि K^{λ}-विधि का आचरण बोरेल विधि जैसा है । अतः यह प्रश्न स्वाभाविक है कि क्या प्रेमचन्द[1,2] जैसा परिणाम प्राप्त किया जाता है ? हमने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करके इस प्रश्न का उत्तर दिया है ।

प्रमेय

माना कि 2π-आवर्ती है और $(-\pi, \pi)$में L-समाकलनीय है तथा माना कि $f \in \text{Lip}\ \alpha\ (o < \alpha \leqslant 1)$. तब फूरियर श्रेणी की K^{λ}-विधि द्वारा सन्निकटन की कोटि निम्नवत प्रदर्शित की जाती है

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x) - S_n^{\lambda}(x)| = O\ (\log n)^{-\alpha}.$$

जहाँ $\overset{\lambda}{S_n}(x)$ (1.3) के आंशिक योगफल के K^{λ}-माध्य हैं ।

3. अपनी प्रमेय की उपपत्ति के लिये हम वुकोविक[4] की निम्नलिखित प्रमेय की सत्यता को अंकित करेंगे ।

प्रमेयिका

$\lambda > o$ तथा $o < t < \pi/2$, के लिये

$$\frac{|I_m \Gamma(\lambda e^{it}+n)|}{\Gamma(\lambda \cos t+n) \sin t/2} = O\left[\frac{\sin(\lambda \sin t \log n)}{\sin t/2}\right] + O(1)$$

जो t में एकसमान है ।

4. प्रमेय की उपपत्ति

माना $S_\nu(x)$ द्योतित करता है फूरियर श्रेणी के νवें आंशिक योगफल को ।

हमें ज्ञात है कि

$$S_\nu(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \phi_x(t)\frac{\sin \nu+\frac{1}{2}t)}{\sin t/2}\,dt + o(1)$$

माना $\overset{\lambda}{S_n}(x)$ द्योतित करता है $S_\nu(x)$ के K^{λ} रूपान्तर को तो वुकोविक[4] का अनुसरण करने पर

$$\overset{\lambda}{S_n}(x) - f(x) = \left\{\frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi}\right\}\int_0^\pi \phi_x(t) K_n(t)\,dt$$

$$= O(1)\int_0^\pi \frac{\phi_x(t)\sin(\lambda \sin t \log n)}{t \exp\{\lambda(1-\cos t)\log n\}}\,dt$$

$$= O(1)\left[\int_0^{1/\log n} + \int_{1/\log n}^{\pi}\right]\frac{\phi_x(t)\sin(\lambda \sin t \log n)}{t \exp\{\lambda(1-\cos t)\log n\}}\,dt$$

$$= I_1 + I_2 \tag{4.1}$$

अब

$$I_1 = O(1)\int_0^{1/\log n}\frac{\phi_x(t)}{t}(\lambda t \log n)\,dt$$

$$= O(\lambda \log n)\left(\frac{1}{\log n}\right)^{\alpha+1}$$

$$= O\{\lambda \log n)^{-\alpha}\} \tag{4.2}$$

तथा

$$I_2 = O(1) \int_{1/\log n}^{\pi} \frac{\phi_x (\sin (\lambda \sin t \log n)}{t \exp \{\lambda (1-\cos t) \log n\}} dt$$

$$= O(1) \left[\frac{1}{\exp \{\log n \,.\, 2 \sin^2 (\frac{1}{2} \log n)\}} \right] \int_{1/\log n}^{\pi} t^{\alpha-1} dt$$

$$= O(\log n)^{-\alpha} \tag{4.3}$$

(4.1), (4.2) तथा (4.3) के संचय से हमारे प्रमेय की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

निर्देश

1. प्रेमचन्द्र, Communications dela Faculte des Sciences. de l'universite d' Ankara, 1979, **28**, 7-11.
2. प्रेमचन्द्र, Communications de la Faculte des Sciences da l' universite d' Ankara. 1981, **30**, 7-16.
3. करमट, जे०, Mathematica cluj, 1935, 9, 164-178.
4. वुकोविक, वी०, Math. *Z.*, 1965, **89**, 192-195.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 32. No. 1, 1989

फूरियर श्रेणी की (J, pn) संकलनीयता

एस० के० वर्मा तथा एस० एन० अग्रवाल
गणित विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय
जी० जी० डी० यूनिवर्सिटी, बिलासपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—सितम्बर 28, 1986]

सारांश

हमने फूरियर श्रेणी की (J, p_n) संकलनीयता पर एक प्रमेय ऐसे प्रतिबन्धों के अन्तर्गत सिद्ध किया है जो खान के प्रतिबन्धों से दुर्बल हैं।

Abstract

On (J, p_n) summability of Fourier series. *By* S. K. Verma and S. N. Agrawal, Government P. G. College, G. G. D. University, Bilaspur (M. P.).

We have proved a theorem on (J, p_n) summability of a Fourier series under conditions on $\{p_n\}$ weaker than those of Khan[2].

1. माना कि $p_n > 0$ ऐसा है कि $\sum_{n=0}^{n} p_n$ अपसारी होता है और घात श्रेणी

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \tag{1.1}$$

की अभिसरण त्रिज्या 1 है। कोई दी हुई श्रेणी Σa_n जिसमें आंशिक योगफलों का अनुक्रम $\{S_n\}$ हो, तो हम संकेतन

$$p_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n \tag{1.2}$$

तथा

$$J_s(x)=\frac{p_s(x)}{p(x)} \tag{1.3}$$

का योग करेंगे ।

यदि (1.2) के दक्षिण पक्ष की श्रेणी दक्षिण विवृत अन्तराल [0, 1] में अभिसारी हो और यदि

$$\lim_{x\to 1-0} J_s(x)=S,$$

तो हम कहते हैं कि श्रेणी Σa_n या अनुक्रम $\{S_n\}$ S में संकलनीयता (J, p_n) है जहाँ S सान्त है, [तुलनार्थ हार्डी[1]]

2. माना कि $f(\theta)$ लेबेस्ग समाकलनीय फलन है जो आवर्त 2π के साथ आवर्ती है। माना कि

$$f(\theta)\sim\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\,\theta+b_n\sin n\theta) \tag{2.1}$$

इसकी फूरियर श्रेणी है । θ_0 को स्थिर करके हम लिखते है

$$\phi(t)=\phi\theta_0(t)=\tfrac{1}{2}\{f(\theta_0+t)+f(\theta_0-t)-2s\} \tag{2.2}$$

खान[2] ने पहले पहल संकलनीयता की (J, p_n) विधि का प्रयोग फूरियर श्रेणी के साथ किया है और निम्नलिखित प्रमेयों को सिद्ध किया है ।

प्रमेय A

$f(\theta)$ की फूरियर श्रेणी को बिन्दु θ_0 पर S तक संकलनीय (J, p_n) होने के लिये आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि

$$\int_0^{\delta}\frac{\phi(t)}{t}\,I_m\,p(xe^{it})\,dt=0\,(p(x)), \tag{2.3}$$

किसी स्वेच्छ δ के लिये $0<\delta<\pi$, ज्यों-ज्यों $x\to 1-0$.

प्रमेय B

यदि

$$\int_0^{t}|\phi\,d(u)|du=0(tp\,(1-t)),\ (t\to+0) \tag{2.4}$$

तथा

$$\int_0^{\delta} \frac{|\phi(u)|}{u} du = 0\,(p(1-t)),\ (t \to +0) \tag{2.5}$$

किसी स्वेच्छ δ के लिये, $0<\delta<\pi$, तो $f(\theta)$ की फूरियर श्रेणी S में θ_0 पर संकलनीय (J, p_n) है जहाँ $\{p_n\}$ निम्नलिखित प्रतिबन्धों को तुष्ट करता है

$$p_n > 0 \tag{2.6}$$

$\{p_n\}$ स्थायी रूप से घटकर शून्य हो जाता है (2.7)

तथा $\{np_n\}$ परिबद्ध है । (2.8)

प्रतिबन्ध (2.6) (J, p_n) विधि के लिये आवश्यक शर्त है अतएव हमारे विचार से यह अधिक है । प्रस्तुत प्रपत्र में हम सिद्ध करेंगे कि प्रतिबन्ध (2.4) के स्थान पर दुर्बलतर प्रतिबन्ध

$$\int_0^t |\phi(u)|\, du = 0\left(\frac{p(1-t)}{p'(1+t)}\right) \text{ ज्यों-ज्यों } t \to +0 \tag{2.4'}$$

रखने तथा प्रतिबन्ध (2.8) को छोड देने पर फूरियर श्रेणी की (J, p_n) संकलनीयता सही उतरती है । वस्तुतः हम निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे ।

प्रमेय

यदि

$$\int_0^t |\phi(u)| = 0\left(\frac{p(1-t)}{p'(1-t)}\right) \text{ ज्यों-ज्यों } t \to +0 \tag{2.9}$$

तथा (2.5) सही है तो $f(\theta)$ की फूरियर श्रेणी θ_0 पर S में समाकलनीय (J, p_n) है जहाँ $\{p_n\}$ स्थायी रूप से घट कर शून्य हो जाता है ।

3. हमें अपने प्रमेय की उपपत्ति के लिये निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी ।

प्रमेयिका[3] 1

$\{p_n\}$ के लिये हमारे प्रमेय में जिस रूप में परिभाषित है ।

प्रमेयिका 2

स्पष्ट है कि

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, p_n\, x^n = x \frac{d}{dx} \{\Sigma\, p_n\, x^n\}$$

$$= xp'(x) \tag{3.1}$$

4. प्रमेय की उपपत्ति

खान[2] की प्रमेय का अनुसरण करते हुए यह सिद्ध करना पर्याप्त होगा कि

$$\left\{\int_0^{1-x}+\int_{1-x}^{\delta}\right\}\frac{\phi(t)}{t}\, I_m\, p(xe^{it})\, dt=0(p(x))$$

अथवा

$$J_1(x)+J_2(x)=0(p(x)) \tag{4.1}$$

अब

$$|J_1(x)=0(xp'(x))\int_0^{1-x}|\phi(t)|\,dt,\ (3.2)\text{ से}$$

$$\text{क्योंकि } \frac{\sin nt}{nt}\leqslant 1.$$

$$=0(xp'(x))\left(\frac{p(x)}{p'(x)}\right)$$

$$=0(p(x)) \text{ ज्यों-ज्यों } x\to 1-0 \tag{4.2}$$

तथा

$$|J_2(x)|=0(1)\int_{1-x}^{\delta}\frac{|\phi(t)|}{t}\,dt$$

$$=0(p(x)) \text{ ज्यों-ज्यों } x\to 1-0$$

(4.1), (4.2), (4.3) के संचय से हमारे प्रमेय की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

निर्देश

1. हार्डी, जी० एच०, Divergent Series, Oxford, 1949.
2. खान, एफ० एम०, Proc. Edinburgh Mathematical Society, 1982, **18**, Series II, 13-17.
3. टिचमार्श, ई० सी०, Theory of Functions, Lowe and Brydone Printers Limited, Thetford, Norfolk, 1978.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol 32, No. 1, 1989

संयुग्मी फूरियर श्रेणी के नार्लुण्ड माध्यों के द्वारा फलनों का सन्निकटन

आशुतोष पाठक तथा वन्दना गुप्ता
गणित अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन (म० प्र०)

[प्राप्त—अक्टूबर 14, 1986]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में संयुग्मी फूरियर श्रेणी के नार्लुण्ड माध्यों द्वारा फलन के सन्निकटन पर विचार किया गया है।

Abstract

Approximation of functions by the Nörlund means of a conjugate Fourier series. *By* Ashutosh Pathak and Vandana Gupta, School of Studies in Mathematics, Vikram University, Ujjain (M.P.).

Approxination of a function by the Nörlund means of a conjugate Fourier series has been presented.

1. माना कि Σa_n आंशिक योगफलों के अनुक्रम $\{s_n\}$ समेत एक दी हुई अनन्त श्रेणी है। माना कि $\{p_n\}$ असली या संमिश्र चरों का अनुक्रम हो तो

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_u,\ P_n \neq 0.$$

अनुक्रम रूपान्तर

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n-k}\, s_k}{1} \quad (P_n \neq 0) \tag{1.1}$$

$$=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k s_{n-k}$$

का अनुक्रम परिभाषित करता है चरों के अनुक्रम $\{p_n\}$ द्वारा उत्पन्न अनुक्रम $\{s_n\}$ के नार्लुण्ड माध्य के अनुक्रम $\{t_n\}$ को । श्रेणी Σa_n अथवा अनुक्रम $\{s_n\}$ को s योगफलों तक नार्लुण्ड माध्यों या संकलनीय (N, p_n) द्वारा संकलनीय कहा जाता है यदि

$$\lim_{n\to\infty} t_n = s$$

संकलनीयता विधि की नियमितता के प्रतिबन्ध हैं

$$\lim_{h\to\infty} \frac{p_n}{P_n}=0 \tag{1.2}$$

तथा

$$\sum_{k=0}^{n} \{p_k\}=(P_n), \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty \tag{1.3}$$

यदि $\{p_n\}$ वास्तविक तथा अनृण हो तो (1.3) की तुष्टि स्वतः हो जाती है और तब संकलन की विधि (N, p_n) की नियमितता के लिये (1.2) आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध है ।

$p_n=1/n+1$ होने की दशा में (N, p_n) विधि परिचित हार्मोनिक संकलनीयता $(N, 1/n+1)$ में समानीत हो जाती है और

$$p_n=\binom{n+\delta-1}{\delta-1}, \ \delta>0$$

के लिये उपर्युक्त विधि (c, δ) माध्य में समानीत हो जाती है ।

2. माना कि $f(x)$ आवर्ती फलन है जिसका आवर्त 2π है और अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में लेबेस्ग के रूप में समाकलनीय है । इस फलन से सम्बद्ध फूरियर श्रेणी है

$$f(x)\sim\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{n}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{2.1}$$

(2.1) की संयुग्मी श्रेणी है

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,.\cos nt-b_n\,.\sin nt), \tag{2.2}$$

जहाँ a_n, b_n $(n=1, 2, \ldots)$ $f(x)$ के फूरियर त्रिकोणमितिय गुणांक हैं।

हम लिखेंगे कि

$$\phi(t)=\phi(x, t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$$

$$\phi(t)=\int_0^t |\phi(u)|\, du$$

$$p_{(1/t)}=p_\tau$$

$$p_{(1/t)}=p_\tau$$

जहाँ τ सूचित करता है $1/t$ के समाकल अंश को।

3. सन्निकटन की कोटि पर फ्लेट ने[2] निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

प्रमेय A

माना कि

$$0 < \alpha < 1, 0 < \delta \leqslant \pi$$

यदि x ऐसा बिन्दु हो कि

$$\int_0^t a\, |d\phi(w)| \leqslant At^{\alpha}, \text{ जब } 0 \leqslant t \leqslant \delta \tag{3.1}$$

तो

$$\sigma_n^{\alpha}(x)-f(x)=0(n^{-\alpha}) \tag{3.2}$$

जहाँ $\alpha_n^{\alpha}(x)$ श्रेणी (2.1) के (c, α) माध्यों को सूचित करता है।

सिद्दीकी[5] ने फलन के सन्निकटन की कोटि के लिये एक प्रमेय सिद्ध की है।

प्रमेय B

माना कि $\{p_n\}$ वास्तविक संख्याओं का धनात्मक अवर्द्धमान अनुक्रम है जिससे कि

$$\int_t^{\xi} f_n(u)\, du=0\left[\frac{p_{1/t}}{n}\right], \; 1/n \leqslant t \leqslant \pi \tag{3.3}$$

जहाँ

$$f_n(t)= I_m\left\{ e^{i(n+1/2)t} \sum_{n=0}^{n} p_v\, e^{-ivt} \right\}. \tag{3.4}$$

और भी, माना कि $0 < \alpha < 1, 0 < \delta \leqslant \pi$.

यदि x ऐसा बिन्दु है कि

$$\int_0^t |d\phi(u)| \leqslant SAt^{\alpha} \tag{3.5}$$

जहाँ $0 \leqslant t \leqslant \delta$ तो

$$t_n(x) - f(x) = 0(n^{-\alpha}) + 0\left(\frac{1}{p_n}\right)$$

पोरवाल[4] को सिद्दीकी की अपेक्षा उत्तम परिणाम प्राप्त हुआ है । वास्तव में उसने निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध किया है ।

प्रमेय C

यदि

$$k(x, t) = \int_t |\phi(u)| \frac{p_{(1/u)}}{u} du = 0(1) \tag{3.6}$$

जहाँ $\{p_n\}$ वास्तविक संख्याओं का धनात्मक एवं अ-बर्द्धमान अनुक्रम है तब

$$t_n(x) - f(x) = 0\left(\frac{1}{p_n}\right) \tag{3.7}$$

x में समरूप में लागू होता है ।

प्रस्तुत प्रपत्र में संयुग्मी फूरियर श्रेणी के नार्लुण्ड माध्यों के द्वारा एक फलन के सन्निकटन का अध्ययन किया गया है । संक्षेप में हम निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे ।

प्रमेय

यदि

$$\psi(x, t) = \int_t^{\delta} |\psi(u)| \frac{p_{(1/u)}}{u} du = 0(1) \tag{3.8}$$

जहाँ $\{p_n\}$ वही है जो उपर्युक्त प्रमेय में है तो

$$\tilde{t}_n(x) - \tilde{f}(x) = 0\left(\frac{1}{p_n}\right) \tag{3.9}$$

जहाँ

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(t) \cot \tfrac{1}{2} t \, dt$$

x में समान रूप से लागू होता है ।

4. प्रमेय की उपपत्ति निम्नलिखित प्रमेयिकाओं पर आधारित है ।

प्रमेयिका 1

यदि $\{p_n\}$ अनृण तथा अ-बर्द्धमान अनुक्रम हो तो $0\leqslant a\leqslant b\leqslant\infty$, $0\leqslant t\leqslant\pi$ के लिये तथा फिर किसी n तथा a के लिये

$$\left|\sum_{k=a}^{b} p_k\, e^{2(n-k)t}\right| \leqslant k p_{(1/t)}$$

K परम चर हैं ।

प्रमेयिका की उपपत्ति मैकफैडेन के अनुसार है[1] ।

प्रमेयिका 2

यदि $\{p_n\}$ अनृण तथा अवर्द्धमान अनुक्रम हो तो $0\leqslant t\leqslant\pi$, $0\leqslant a\leqslant b\leqslant\infty$ के लिये तथा किसी a एवं b के लिये

$$\left|\sum_{k=a}^{b} p_k \frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})t}{\sin t/2}\right| = 0\left[\frac{p_{(1/t)}}{t}\right]$$

5. प्रमेय की उपपत्ति

माना कि $s_n(\tilde{f}, x)$ द्योतक है श्रेणी (2.2) के nवें आंशिक योगफल के तब

$$s_n(\tilde{f}, x)=\frac{1}{2\pi}\int_t^{\pi} \psi(t)\,\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin t/2}\,dt$$

अतः

$$t_n(\tilde{f}, x)-f(x)=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, s_n(f, x)\;\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\cot t/2dt$$

$$=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\,\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin t/2}\,dt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\cot t/2\,dt.$$

$$=\frac{1}{2\pi P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k\int_0^{\pi}\psi(t)\,\frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin t/2}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi} \psi\ (t)\ \bar{N}_n\ (t)\ dt$$

जहाँ

$$\bar{N}_n\ (t)=\ \frac{1}{2\pi\ p_n}\ \sum_{k=0}^{n} p_k\ \frac{\cos\ (n+\frac{1}{2})\ t}{\sin\ t/2} \tag{5.1}$$

हम लेते हैं

$$I=\int_0^{\pi} \psi\ (t)\ \bar{N}_n\ (t)\ dt$$

$$=\left\{\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right\} \psi\ (t)\ \ \bar{N}_n\ (t)\ dt,$$

$$0< \delta < \pi$$

$$=I_1+I_2+I_3 \text{ माना} \tag{5.2}$$

अब $1/n \leqslant t \leqslant \delta$ के लिये

$$\bar{N}_n\ (t)\ =\ \frac{1}{2\pi p_n}\ 0\ \left[\sum_{k\ 0}^{n} pn\ \frac{\cos\ (n+\frac{1}{2})\ t}{\sin\ t/2}\right]$$

$$=\frac{1}{2\ \pi\ p_n}\ 0\ \left[\frac{p_{(1/t)}}{t}\right]$$

$$=0\ \left[\frac{p_{(1/t)}}{t\ \ p_n}\right] \text{ लेमा 2 से}$$

अतः

$$I_2=0\left(\int_{1/n}^{\delta}\ \frac{|\psi\ (u)|}{u}\ \frac{p_{(1/u)}}{p_n}\ du\right)$$

$$=0\left(\frac{1}{p_n}\right) \text{ संकल्पना(3.8) से} \tag{5.3}$$

अपरंच, रीमान लेबेस्ग प्रमेय तथा नियमितता प्रतिबन्धों के बल पर

$$I_3=0\left(\frac{1}{p_n}\right) \tag{5.4}$$

अपरंच, प्रतिवन्ध

$$\psi(u) = \int_{1/n}^{\delta} \frac{\psi(u)}{u} \frac{p_{\frac{1}{2}u}}{u} du = 0(1)$$

का अर्थ है कि

$$\phi(t) = \int_0^t |\psi(u)| du$$

$$= 0\left(\frac{t}{p_{(1/t)}}\right)$$

माना

$$\frac{\psi(u)}{u} p_{(1/u)} = \psi(u)$$

क्योंकि

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{u}{p_{(1/u}} \left\{\frac{\psi(u)}{u} \frac{p_{(1/u)}}{u}\right\} du$$

$$= \int_0^t \frac{u}{p_{(1/u)}} \frac{\psi(u)}{u} p_{(1/u)} du$$

अंशतः समाकल करने पर

$$\phi(t) = \frac{1}{p_{(1/t)}} \Big[-u\,\psi(u)\Big]_0^t + \int_0^t \psi(u) \left\{\frac{d}{du}\left(\frac{u}{p_{(1/u)}}\right)\right\} du$$

$$= 0\left[\frac{t}{p_{(1/t)}}\right] + (0)\, 1 \frac{t}{p_{(1/t)}}$$

$$= 0\left[\frac{t}{p_{(1/t)}}\right]$$

पुनः $0 \leqslant t \leqslant 1/n$ के लिये

$$\bar{N}_n(t) = 0(n)$$

अतः

$$I_1 = 0\left[\int_0^{1/n} n \,.\, \frac{t}{p_{(1/t)}} \,.\, dt\right]$$

$$= 0\left(\frac{1}{p_n}\right) \tag{5.5}$$

(5.3), (5.4) तथा (5.5) को मिलाने पर

$$I = 0\left(\frac{1}{p_n}\right)$$

इस तरह प्रमेय पूर्ण हुई।

निर्देश

1. मकफैडेन, Dube X Mathematical Journal, 1942, **9**, 118-207.
2. फ्लेट, जे० एम०, Q. J. Math. 7, 87-95.
3. नार्लुण्ड, एन० ई०, Lunds Universitiets, Arssbrift, 1919, **16**, No. 3.
4. पोरवाल, जे० पी०, पी० एच-डी० थीसिस, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन
5. सिद्दीकी, ए० एच०, Ind. J. Pure and Applied Maths. 1971, **2**, (3), 367-373.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol 32, No. 1, 1989

कई चरों के H-फलन वाले बहुगुण समाकल

ए० के० अरोरा तथा सी० एल० कौल
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरी कालेज, जयपुर

[प्राप्त—जुलाई 21, 1986]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य कई संमिश्र चरों के H-फलन वाले कतिपय बहुगुण समाकलों का मान ज्ञात करना है।

Abstract

Multiple integrals involving the *H*-function of several variables. *By* A. K. Arora and C. L. Koul, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur (Rajasthan).

The aim of the paper is to evaluate certain multiple integrals involving the H-function of several complex variables.

1. श्रीवास्तव इत्यादि द्वारा[4] हाल ही में प्रचारित बहुचरीय H-फलन को निम्नलिखित रूप में परिभाषित एवं व्यक्त किया जाता है

$$H[z_1, \ldots, z_r] = H^{o,n\,:\,m_1,n_1;\,\ldots;\,m_r,n_r}_{p,q\,:\,p_1,q_1;\,\ldots;\,p_r,q_r}\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix.$$

$$\left.\begin{matrix} (a_j\, \alpha_j', \ldots, \alpha_j^{(r)})_{1,p} : (c_j', \gamma_j')_{1,p_1}; \ldots; (c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)})_{1,p_r} \\ (b_j; \beta_j', \ldots, \beta_j^{(r)})_{1,q} : (d_j', \delta_j')_{1,q_1}; \ldots; (d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)})_{1,q_r} \end{matrix}\right] . \quad (1.1)$$

फाक्स के H-फलन के लिये श्रीवास्तव इत्यादि[4] को देखना चाहिये। इसी तरह फाक्स के H-फलन के अभिसरण के प्रतिबन्धों आदि के लिये भी इसी निर्देश को देखना चाहिये। इस प्रपत्र में आये विविध H-फलनों के लिये ये प्रतिबन्ध तुष्ट मान लिये गये हैं। (1.1) में $r=2$ होने पर यह श्रीवास्तव[4] के दो चरों वाले H-फलन $H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ में समानीत हो जाता है।

प्रयुक्त संकेतन

(*) संकेत बताता है कि उस स्थान पर प्राचल वही है जो (1.1) के दक्षिण पक्ष में बहुचरीय H-फलन के संगत स्थानों पर प्राचलों के समान हैं। $(a_j, \alpha_j)_{1,p}$ द्वारा अनुक्रम $(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_p, \alpha_p)$ का बोध होता है।

2. बहुगुण समाकल

यदि R वह क्षेत्र हो जिसे $0 \leqslant x_1, \ldots, 0 \leqslant x_m$,

$$\left(\frac{x_1}{w_1}\right)^{\alpha_1} + \ldots + \left(\frac{x_m}{w_m}\right)^{\alpha_m} \leqslant 1,\ \alpha_i,\ w_i,\ k_i > 0 \quad i=1,\ldots,\ m \text{ के लिये}$$

एवं

$$X = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i}{w_i}\right)^{\alpha_i},\ T = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{k_i}{\alpha_i}\right)$$

द्वारा व्यक्त किया जाता हो तो हमें प्राप्त होगा

(a) निम्नलिखित के साथ

$$F(X) = 1 - X)^{h-T-1}(1+kX)^{-h} H_{P,Q}^{M,N}\left[y\frac{X^{\eta}(1-X)^{\mu}}{(1+kX)^{\eta+\mu}}\middle|\begin{matrix}(e_j, E_j)_{1,P} \\ (f_j, F_j)_{1,Q}\end{matrix}\right] h > o,$$

$$X_i = X^{u_i}(1-X)^{v_i}(1+kX)^{-u_i-v_i},\ i=1,\ \ldots,\ r;\ k > -1,$$

$$\int_R \cdots \int H[z_1X_1, \ldots, z_rX_r]\ F(X) \prod_{i=1}^{m} (x_i^{k_i-1}\ dx_i)$$

$$= A\ H_{p+2,q+1\ :\ *\ ;\ \ldots;\ *;\ P,Q}^{o,n+2\ :\ *;\ \ldots;\ *;\ M,N}\left[\begin{matrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_r \\ Y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} U : *;\ \ldots;\ *;\ (e_j, E_j)_{1,P} \\ \\ V : *;\ \ldots;\ *;\ (f_j,\ F_j)_{1,Q}\end{matrix}\right] \tag{2.1}$$

जहाँ

$$U : (1-T;\ u_1,\ \ldots,\ n_r,\ \eta),\ (1-h+T;\ v_1,\ \ldots,\ v_r,\ \mu),\ (a_j;\ \alpha_j',\ \ldots,\ \alpha_j^{(r)},\ 0)_{1,p}$$

$$V:(1-h;\,u_1+v_1,\,\ldots,\,u_r+v_r,\,\eta+\mu),\,(b_j;\,\beta_j',\,\ldots,\,\beta_j^{(r)},\,0)_{1,q}$$

तथा

$$A=\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{w_i^{k_i}}{a_i}\Gamma\left(\frac{k_i}{a_i}\right)\right]/(1+k)^{\tau}\,[\Gamma\,(T)],$$

$$Z_i=z_i\,(1+k)^{-u_i},\; Y=y\,(1+k)^{-\eta},\; i=1,\,\ldots,\,r,$$

बशर्ते कि

$$\min Re\,\left(h-T+\sum_{i=1}^{r}v_i\,D_j^{(i)}+\mu\frac{f_s}{F_s},\;\sum_{i=1}^{m}k_i+\sum_{i=1}^{r}u_i\,D_j^{(i)}+\eta\,\frac{f_s}{F_s}-m+1\right)>0$$

$D_j^{(i)}=\dfrac{d_j^{(i)}}{\delta_j^{(i)}}$, साथ ही $j=1,\,\ldots,\,m_i;\; i=1,\,\ldots,\,r;\; s=1,\,\ldots,\,M;$

(b) निम्नलिखित के साथ

$$G\,(X)=(1-X)^{h-T-1}\,(1+kX)^{-h}\,H^{O,N\,:\,M_1,\,N_1;\,\ldots;\,M_s,N_s}_{P,Q\,:\,P_1,Q_1;\,\ldots;\,P_s,Q_s}\left[\begin{matrix}Y_1X'_1\\ \vdots\\ Y_sX'_s\end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix}(a_j';\,A_j',\,\ldots,\,A_j^{(s)})_{1,P}:(e_j',\,E_j')_{1,P_1};\ldots;(e_j^{(s)},\,E_j^{(s)})_{1,P_s}\\ (b_j';\,B_j',\,\ldots,\,B_j^{(s)})_{1,Q}:(f_j',\,F_j')_{1,Q_1},\ldots,(F_j^{(s)},\,F_j^{(s)})_{1,Q_s}\end{matrix}\right],\; h>o$$

तथा

$X'_j=X^{\eta_j}\,(1-X)^{\mu_j}\,(1+kX)^{-\eta_j-\mu_j}j=1,\,\ldots,\,s;\; k>-1$, के लिये

$$\int_R\!\cdots\!\int H\,[z_1X_1,\,\ldots,\,z_rX_r]\,G\,(X)\prod_{i=1}^{m}(x_i^{k_i-1}\,dx_i)$$

$$=A\,H^{o,n+N+2\,:\,m_1,n_1;\,\ldots;\,m_r,n_r;\,M_1,N_1;\,\ldots;\,M_s,N_s}_{p+P+2,q+Q+1\,:\,p_1,q_1;\,\ldots;\,p_rq_r;\,P_1,Q_1;\,\ldots;\,P_s,Q_s}\left[\begin{matrix}Z_1\\ \vdots\\ Z_r\\ Y_1\\ \vdots\\ Y_s\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}U_1:S_1;\,S_2\\ V_1:S_3;\,S_4\end{matrix}\right] \qquad (2.2)$$

जहाँ

$$U_1 : (1-T; u_1, \ldots, u_r, \eta_1, \ldots, \eta_s), (1-h+T; v_1, \ldots, v_r, \mu_1, \ldots, \mu_s),$$

$$(a_j; \alpha_j', \ldots, \alpha_j^{(r)}, o, \ldots, o)_{1,n}, (a_j', o, \ldots, o, A_j', \ldots, A_j^{(s)})_{1,P},$$

$$(a_j; \alpha_j', \ldots, \alpha_j^{(r)}, o, \ldots, o)_{n+1,p}$$

$$V_1 : (1-h; u_1+v_1, \ldots, u_r+v_r, \eta_1+\mu_1, \ldots, \eta_s+\mu_s),$$

$$(b_j; \beta_j', \ldots, \beta_j^{(r)}, o, \ldots, o)_{1,q}, (b_j'; o, \ldots, o, B_j', \ldots, B_j^{(s)})_{1,Q}$$

$$S_1 : (c_j', \gamma_j')_{1,p_1} : \ldots ; (c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)})_{1,p_r}$$

$$S_2 : (d_j', \delta_j')_{1,q_1} ; \ldots ; (d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)})_{1,q_r}$$

$$S_3 : (e_j', E_j')_{1,P_1} ; \ldots ; (e_j^{(s)}, E_j^{(s)})_{1,P_s}$$

$$S_4 : (f_j', F_j')_{1,Q_1} ; \ldots , (f_j^{(s)}, F_j^{(s)})_{1,Q_s}$$

तथा

$$Z_i = z_i (1+k)^{-u_i}, Y_j = y_j (1+k)^{-\eta_j}, i=1, \ldots, r; j=1, \ldots, s$$ के लिये

A को (2.1) से दिया जाता है, बशर्ते कि

$$\min Re \left(\sum_{i=1}^{r} u_i D_j^{(i)} + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha \lambda_I^{(\alpha)} - m + 1, h - T + \sum_{i=1}^{r} v_i D_j^{(i)} + \sum_{\alpha=1}^{s} \mu_\alpha \lambda_I^{(\alpha)} \right) > 0,$$

जहाँ

$$D_j^{(i)} = \frac{d_j^{(i)}}{\delta_j^{(i)}}, \quad \lambda_I^{(\alpha)} = \frac{f_I^{(\alpha)}}{F_I^{(\alpha)}}, j=1, \ldots, m_i; i=1, \ldots, r;$$

$$I=1, \ldots, M_\alpha; \alpha=1, \ldots, s,$$

उपपत्ति की विधि

(2.1) को स्थापित करने के लिये हम (2.1) के वाम पक्ष में फाक्स के H-फलन के लिये श्रीवास्तव[4] के परिणाम से मान रखते हैं, समाकलनों का क्रम बदल देते हैं, श्रीवास्तव[4] के परिणाम में से कई चरों वाले H-फलन के लिये मान रखते हैं, पुनः समाकलनों का क्रम बदलते हैं और (2.1) के दक्षिण पक्ष को प्राप्त करने के लिये ग्रैडस्ट्येन तथा रिजिक[3], श्रीवास्तव[4] एवं एर्डेल्यी[2] के परिणामों का प्रयोग करते हैं। इसी तरह (2.2) की भी स्थापना की जाती है।

3. विशिष्ट दशायें

यदि हम (2.1) में $a_i=w_i=1$ $(i=1, ..., m)$, $\eta=0$, $\mu=0$ लें $M=1$, $N=P=0$, $Q=1$, $f_1=0, F_1=1$ रखें और फिर उसमें $y \to o$ होने दें तो यह अगल तथा कौल के ज्ञात परिणाम में समानीत हो जाता है।[1]

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण विश्वविद्यालय अनुदान आयोग के प्रति आर्थिक सहायता प्रदान करने के लिये आभार व्यक्त करते हैं।

निर्देश

1. अगल, एस० एन० तथा कौल, सी० एल०, **ज्ञानाभ** 1981, **11**, 99-105.

2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transendental Functions, Vol. I, Mc Graw-Hill, New York, 1950.

3. ग्रैडस्ट्येन, आई० एस० तथा रिजिक, आई० एम०, Tables of Integrals, Series and Products. Academic Press, New York, 1980.

4. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, The H-functions of one and two variables with applications. South Asian Publishers, New Delhi, 1982.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 32, No. 1, 1989

H-फलनों वाले कतिपय समाकल रूपान्तर

सुजाता वर्मा
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरी कालेज, जयपुर

[प्राप्त—मई 1, 1986]

सारांश

सर्वप्रथम हम फाक्स के H-फलन तथा कई चरों वाले H-फलन सम्बन्धी दो समाकलों का मूल्यांकन करेंगे और फिर इन समाकलों का उपयोग H-फलनों वाले दो सामान्य बहुगुण समाकलों का मान ज्ञान करने के लिये करेंगे ।

Abstract

Certain integral transformations involving H**-functions.** *By* Sujata Verma, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur (Rajasthan).

We first evaluate two integrals involving Fox's H-function and the H-function of several variables which was introduced and studied by H. M. Srivastava and R. Panda. We then use these integrals to establish two general multiple integral transformations involving H-functions. Our results provide interesting unifications and generalizations of a number of integrals and integral transformations including a result obtained by author [6, p. 73, Eq. (2.2)].

1. इस प्रपत्र में आगत बहुचरीय H-फलन का अध्ययन पहले पहल श्रीवास्तव तथा पण्डा[4] ने किया था और परिभाषा भी दी थी । हम निम्नलिखित संकुचित संकेत का व्यवहार k संमिश्र चरों $z_1 \ldots z_k$ वाले H-फलन को सूचित करने के लिये करेंगे ।[5]

$$H\,[z_1,\ldots,z_k]=H^{o,n\,:\,m_1,n_1;\,\ldots;\,m_k,n_k}_{p,q\,:\,p_1,q_1;\,\ldots;\,p_k,q_k}\left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_j;\alpha_j',\ldots,\alpha_j^{(k)})_{1,p}:(c_j',\gamma_j')_{1,p_1};\ldots;(c_j^{(k)},\gamma_j^{(k)})_{1,p_k} \\ \\ (b_j;\beta_j',\ldots,\beta_j^{(k)})_{1,q};\ldots;(d_j',\delta_j')_{1,q_1};\ldots;(d_j^{(k)},\delta_j^{(k)})_{1,q_k}\end{matrix}\right.\right] \tag{1.1}$$

इस फलन की परिभाषा, इसके विविध प्राचलों पर प्रतिबन्धों, अभिसरण के प्रतिबन्ध तथा $z_1 \ldots z_k$ के लघु तथा दीर्घ मानों के लिये इसके आचरण आदि उपर्युक्त पुस्तक[1] में देखे जा सकते हैं।

पुनश्च, यदि (1.1) में $n=o$ तो बहुचरीय H-फलन को H के बजाय H_1 संकेत द्वारा निरूपित किया जावेगा।

शोधपत्र के प्रमुख समाकलों का मान ज्ञात करने के लिये निम्नलिखित सूत्रों की [2, p. 178, Eq. (24); 3. p. 3, Eq. (5)] आवश्यकता पड़ेगी।

$$\int_o^\infty x^{-\gamma-1} \left\{\left(x+\frac{z}{x}\right)^2-1\right\}^{-1/2n-1/2} Q_n^m\left[\frac{\left(x+\frac{z}{x}\right)}{\sqrt{\left\{\left(x+\frac{z}{x}\right)^2-1\right\}}}\right] dx$$

$$= z^{-1/2(v+m+n+1)}\, 2^{-m-2}$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2})\ \Gamma(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2})\ \Gamma(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-m+1)}$$

$$\cdot\, {}_2F_1\left[\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}n-\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2} : n+1;\ 1-(4z)^{-1}\right], \tag{1.2}$$

जहाँ

$Re\ (n \pm v \pm m+1)>0,\ |1-(4z)^{-1}|>0;$

$$\int_o^\infty x^{v+1}\,(\alpha^2+x^2)^{-\lambda/2-5/4} \exp\left(-\frac{p^2\,\alpha}{\alpha^2+x^2}\right) J_v\left(\frac{p^2 x}{\alpha^2+x^2}\right) dx$$

$$= 2^{-\lambda-v-1/2}\, p^{2v}\, \pi^{1/2}\, \alpha^{-\lambda-1/2} \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+v+\frac{5}{2}\right)}$$

$$\cdot\, {}_1F_1\left[\lambda+\frac{1}{2},\ v+\frac{\lambda}{2}+\frac{5}{4};\ -\frac{p^2}{(2\,\alpha)}\right], \tag{1.3}$$

जहाँ

$Re\ (\alpha)>0,\ p>0,\ Re\ (\lambda+\frac{1}{2})>0,\ Re\ (v+1)>0.$

2. समाकल

$$\int_0^\infty x^{-v-1}\left[\left(x+\frac{z}{x}\right)^2-1\right]^{-(n+1)/2} Q_n^m\left[\frac{\left(x+\frac{z}{x}\right)}{\sqrt{\left\{\left(x+\frac{z}{x}\right)^2-1\right\}}}\right]$$

$$\cdot\, H_{P,Q}^{N,M}\left[y\lambda^{\mu}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,P}\\(b_j,\beta_j)_{1,Q}\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{2^{-m-2}\; z^{(v+m+n+1)/2}}{\Gamma\,(n-m+1)}\sum_{\omega=0}^{\infty}\frac{[1-(4z)^{-1}]^{\omega}}{\omega!\,\Gamma(n+1+\omega)}$$

$$\cdot\, H_{P+2,Q+2}^{M+2,N+2}\left[yz^{\mu/2}\,\middle|\,\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right] \qquad (2.1)$$

जहाँ

$$A=\left(\frac{1-n-m+v}{2}-\omega,\frac{\mu}{2}\right),\left(\frac{1-n+v+m}{2},\frac{\mu}{2}\right),(a_j,\alpha_j)_{1,P},$$

$$B=(b_j,\beta_j)_{1,Q},\left(\frac{n-m+1+v}{2},\frac{\mu}{2}\right),\left(\frac{n+m+v+1}{2}+\omega,\frac{\mu}{2}\right)$$

तथा निम्नलिखित प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं

$$Re\,(n\pm m\pm v+1)+\mu\,Re\left(\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0$$

$$1\leqslant j\leqslant M$$

$$\left|1-\frac{1}{(4z)}\right|<1$$

साथ ही, (2.1) में $H_{P,Q}^{M,N}[z]$ सुपरिचित फाक्स के $\bar{H}$-फलन[5] के लिये आया है जिससे अभिसरण के प्रचलित प्रतिबन्धों की तुष्टि होती है ।

$$\int_0^\infty x^{v+1}\,(a^2+x^2)^{-\lambda/2-5/4}\exp\left(-\frac{p^2\,a}{a^2+x^2}\right)J_v\left(\frac{p^2x}{a^2+x^2}\right)$$

$$\cdot\, H_1\,[z_1\,(a^2+x^2)^{-\rho_1},\,\ldots,\,z_k\,(a^2+x^2)^{-\rho_k}]\,dx$$

$$=2^{-\lambda-\nu-1/2}\, p^{2\nu}\sqrt{\pi}\, \alpha^{-\lambda-1/2} \sum_{\omega=0}^{\infty} \frac{1}{\omega!}\left(-\frac{p^2}{2\alpha}\right)^{\omega}$$

$$H^{o,n+1\,:\,m_1,n_1;\,\ldots;\,m_k,n_k}_{p+1,q+2\,:\,p_1,q_1;\,\ldots:\,p_k,q_k} \left[\begin{matrix} z_1\,(2\alpha)^{-2\rho_1} \\ \vdots \\ z_k(2\alpha)^{-2\rho_k} \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} C \\ \\ D \end{matrix}\right] \tag{2.2}$$

जहाँ

$$C=(\tfrac{1}{2}-\lambda-\omega;\, 2\rho_1,\, \ldots,\, 2\rho_k),(a_j,\, \alpha_j',\, \ldots,\, \alpha_j^{(k)})_{1,p}\,,$$

$$(c_j',\, \gamma_j')_{1,p_1},\, \ldots,\, (c_j^{(k)},\, \gamma_j^{(k)})_{1,p_k}.$$

$$D=(\tfrac{1}{2}-\lambda/2;\, \rho_1,\, \ldots,\, \rho_k),\, (\tfrac{1}{2}-\lambda/2-\nu-\omega;\, \rho_1,\, \ldots,\, \rho_k),$$

$$(b_j;\, \beta_j';\, \ldots;\, \beta_j^{(k)})_{1,q} : (d_j',\delta_j')_{1,q_1};\, \ldots;(d_j^{(k)},\, \delta_j^{(k)})_{1,q_k}$$

जहाँ

$$\rho_i>o,\ Re\ (\alpha)>o,\ p>o,\ Re\ (\nu+1)>o,\ i=1,\ \ldots,\ k.$$

$$\Lambda_i>o,\ |\arg z_i|<\tfrac{1}{2}\,\pi\,\Lambda_i,$$

जहाँ

$$\Lambda_i=-\sum_{j=n+1}^{p}\alpha_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{n_i}\gamma_j^{(i)}-\sum_{j=n_i+1}^{p_i}\gamma_j^{(i)}-\sum_{j=1}^{q}(\beta_k)^{(i)}$$
$$+\sum_{j=1}^{m_i}\delta_j^{(i)}-\sum_{j=m_i+1}^{q_i}\delta_j^{(i)}>o,$$

$$Re\,(\nu+1)-\rho_i\,\min\left\{Re\left(\frac{a_j^{(i)}}{\delta_j^{(i)}}\right)\right\}>o\ (i=1,\ =1,\ \ldots,\ k)$$

(2.1) के वाम पक्ष में (1.1) द्वारा परिभाषित तथा $n=o$ वाले बहुचरीय H-फलन के लिये संकेत H_1 आया है।

(2.1) की उपपत्ति

(2.1) को व्युत्पन्न करने के लिये H-फलन के वाम पक्ष को मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल के पदों में व्यक्त करते हैं।[5]

इसके बाद हम s तथा x समाकलों के क्रमों को परस्पर बदलते हैं तथा (1.2) द्वारा प्राप्त फल की सहायता से x का समाकल का मान ज्ञात करते हैं। अब हम यहाँ पर आये फलन $_2F_1$ का मान श्रेणी रूप में रखते हैं; समाकलन तथा संकलन का क्रम परस्पर बदलते हैं और इस तरह से प्राप्त व्यंजक की व्याख्या H-फलन के पद में करते हैं। इससे हमें वांछित परिणाम (2.1) प्राप्त होता है।

(2.2) को प्राप्त करने के लिये हम परिणाम (1.3) का उपयोग करते हैं और ऊपर अंकित विधि का पालन करते हैं।

3. समाकल रूपान्तर

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_1^{\rho_1-1} \cdots x_r^{\rho_r-1} X^\sigma \left[\left(X+\frac{t}{X}\right)^2-1\right]^{-1/2n-1/2}$$

$$\cdot Q_n^m \frac{\left(X+\frac{t}{X}\right)}{\sqrt{\left\{\left(X+\frac{t}{X}\right)^2-1\right\}}}$$

$$\cdot H_{P,Q}^{M,N}\left[y x_1^{u_1} \cdots x_r^{u_r} X^v \middle| \begin{matrix}(a_j, \alpha_j)_{1,P} \\ (b_j, \beta_j)_{1,Q}\end{matrix}\right] dx_1 \ldots dx_r$$

$$=\frac{2^{-m-2}\, t^{-(m+n+1-s)/2}}{\Gamma(n-m+1)} (t_1 \ldots t_r)^{-1} \prod_{j=1}^{r} (c_j)^{-\rho_j/t_j}$$

$$\cdot \sum_{\omega=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+\omega+1)\,\omega!} \left(1-\frac{1}{4z}\right)^\omega$$

$$\cdot H_{P+r+2,Q+3}^{M+2,N+r+2}\left[y z^{U/2} c_1^{-(u_1/t_1)} \cdots c_r^{(-u_r/t_r)} \middle| \begin{matrix} G \\ D \end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

जहाँ

$$X=c_1 x_1^{t_1}+\ldots+c_r x_r^{t_r},\ S=\frac{\rho_1}{t_1}+\ldots+\frac{\rho_r}{t_r}+\sigma$$

$$U=\frac{u_1}{t_1}+\ldots+\frac{u_r}{t_r}+v,\ G=\left(\frac{1-m-n-S}{2}-\omega, \frac{U}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1+m-n-S}{2}, \frac{U}{2}\right), \left(1-\frac{\rho j}{t j}, \frac{U j}{t j}\right)_{1,r}, (a_j, \alpha_j)_{1,P}$$

$$D=\left(\frac{m+n+1-S}{2}+\omega, \frac{U}{2}\right); \left(\frac{n-m-S}{2}, \frac{U}{2} (b_j, \beta_j)_{1,Q}(1-S-\sigma, U-v)\right)$$

तथा $\overset{m}{Q_n}(z)$ सहचारी लीजेण्ड्र फलन है।

समाकल रूपान्तर (3.1) निम्नलिखित पर्याप्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है

(i) $c_j > o,\ t_j > o,\ \nu > o,\ U_j > o,\ Re\,(\rho_j) > o,\ (j = 1, \ldots, r)$

$Re\,[n \pm m \pm (S-\sigma)+1] + U \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant M} \left[Re\left(\frac{b_j}{\beta_j}\right)\right] > o$

(ii) $Re\,(z) > o,\ \left|1 - \frac{1}{4z}\right| < 1$

(iii) $\lambda = \sum\limits_{j=1}^{M} (\beta_j) - \sum\limits_{j=M+1}^{Q} (\beta_j) + \sum\limits_{j=1}^{N} (\alpha_j) - \sum\limits_{j=N+1}^{P} (\alpha_j) > o,\ |\arg y| < \frac{1}{2}\lambda\pi.$

$$\int_o^\infty \cdots \int_o^\infty X^{\upsilon+1} (\alpha^2 + X^2)^{-\lambda/2-5/4} \exp\left(\frac{-s^3\alpha}{\alpha^2+X^2}\right) J_\upsilon \left(\frac{s^2 X}{\alpha^2+X^2}\right)$$

$$H_1\,[z_1\,\{\alpha^2+X^2\}^{-\rho_1}, \ldots, z_k\,\{\alpha^2+X^2\}^{-\rho_k}]\, dx_1, \ldots, dx_r$$

$$= 2^{-\lambda-\upsilon-1/2}\, \alpha^{-\lambda-1/2}\, \pi^{1/2}\, s^{2\upsilon} \sum_{\omega=o}^{\infty} \left(-\frac{s^2}{2\alpha}\right)^{\omega} \frac{1}{\omega\,!}$$

$$\cdot\, H^{o,n+1\,:\,m_1,n_1:\,\ldots;\,m_k,n_k}_{p+1,q+2\,:\,p_1,q_1;\,\ldots;\,p_k,q_k} \left[\begin{matrix} z_1\,(2\alpha)^{-2\rho_1} \\ z_k\,(2\alpha)^{-2\rho_k} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} I \\ J \end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

जहाँ

$X = c_1\, x_1^{t_1} + \ldots + c_r\, x_r^{t_r}$

$I = (\frac{1}{2} - \lambda - \omega;\ 2\rho_1, \ldots, 2\rho_k),\ (a_j;\ \alpha_j', \ldots, \alpha_j^{(k)})_{1,p}:$

$(c_j', \nu_j')_{1,p_1};\ \ldots;\ (c_j^{(k)}, \nu_j^{(k)})_{1,p_k},$

$J = (\frac{1}{4} - \lambda/2;\ \rho_1, \ldots, \rho_k),\ (-1/4 - \lambda/2 - \nu - \omega;\ \rho_1, \ldots, \rho_k)$

$(b_j;\ \beta_j', \ldots, \beta_j^{(k)})_{1,q} : (d_j', \delta_j')_{1,q_1}, \ldots, (d_j^{(k)}, \delta_j^{(k)})_{1,q_k}$

बशर्ते कि

$c_j > o,\ t_j > o,\ \rho_i > o,\ i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, r$

$Re\,(\alpha) > o,\ s > o,\ Re\,(\nu+1) > o.$

तथा (2.2) के प्रतिबन्ध समुच्य (ii) तथा (iii) की तुष्टि होती हो।

(3.1) की उपपत्ति

माना कि

$$\Delta=\int_{o}^{\infty}\cdots\int_{o}^{\infty}(x_1^{\rho_1-1}\ldots x_r^{\rho_r-1})\, f(c_1 x_1^{t_1}+\ldots+c_r x_r^{t_r})$$

$$\cdot\, H_{P,Q}^{M,N}\left[y\, X^{v}{}^{u_1\ldots u_r}_{x_1\ldots x_r}\middle|\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,P}\\(h_j,\beta_j)_{1,Q}\end{matrix}\right]dx_1\ldots dx_r$$

मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल के पदों में आये हुये H-फलन को स्थानान्तरित करने तथा ξ-एवं $(x_1\cdots x_r)$ समाकलों के क्रम को परस्पर बदलने पर प्राप्त करते हैं :

$$\Delta=\frac{1}{2\pi\omega}\int_{L}\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(b_j-\beta_j\,\xi)\prod_{j=1}^{N}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\,\xi)}{\prod_{j=M+1}^{Q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\,\xi)\prod_{j=N+1}^{P}\Gamma(a_j-\alpha_j\,\xi)}y^{\xi}$$

$$\Big[\int_{o}^{\infty}\cdots\int_{o}^{\infty}(x_1^{\rho_1+1u_1\xi-1}\ldots x_r^{\rho_r+u_r\xi-1}$$

$$\cdot\,(c_1 x_1^{t_1}+\ldots+c_r x_r^{t_r})^{v\xi} f(c_1 x_1^{t_1}+\ldots+c_r x_r^{t_r})\, dx_1\ldots dx_r\Big]\, d\xi$$

अब परिचित परिणाम[1] की अपील द्वारा प्राप्त करते हैं

$$\Delta=\frac{1}{2\pi\omega}\int_{L}\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(b_j-\beta_j\,\xi)\prod_{j=1}^{N}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\,\xi)}{\prod_{j=M+1}^{Q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\,\xi)\prod_{j=N+1}^{P}\Gamma(a_j-\alpha_j\,\xi)}y^{\xi}$$

$$\cdot\,(t_1\ldots t_r)^{-1}\prod_{j=1}^{r}(c_j)^{-\frac{\rho_j-u_j\,\xi}{t_j}}$$

$$\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{\rho_1+u_1\,\xi}{t_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\rho_r+u_r\,\xi}{t_r}\right)\right\}}{\left\{\Gamma\left(\frac{\rho_1+u_1\,\xi}{t_1}\right)+\ldots+\Gamma\left(\frac{\rho_r+u_r\xi}{t_r}\right)\right\}}$$

$$\int_{o}^{\infty} z \left(\frac{\rho_1+u_1 \xi}{t_1}\right)+ \dots +\left(\frac{\rho_r+u_r \xi}{t_r}\right)+v \xi-1 f(z)\, dz$$

अब उपर्युक्त समीकरण में पुनः ξ-समाकल को H-फलन के पदों में लिखने पर हमें

$$\triangle=(t_1 \dots t_r)^{-1} \prod_{j=1}^{r} (c_j)^{-\rho j/tj} \int_{o}^{\infty} z^{\rho_1/t_1+\dots+\rho_r/t_r-1} f(z)$$

$$. H_{P+r,Q+1}^{M,N+r} \left[z\, c_1^{-u_1/t_1} \dots c_r^{-u_r/t_r} z^{U} \middle| \begin{matrix} (1-\rho_j/t_j, u_j/t_j)_{1,r}, (a_j, \alpha_j)_{1,P} \\ (b_j, \beta_j)_{1,Q}, (1-S+\sigma, U-v) \end{matrix} \right]$$

प्राप्त होता है बशर्ते कि

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant r} \{c_j . t_j, Re(\rho_j)\} > o$$

तथा f इस प्रकार संस्तुत किया जाता है कि दोनों पक्षों के समाकल का अस्तित्व रहे।

अब हम

$$f(z)=z^{\sigma} \left[\left(z+\frac{t}{z}\right)^2-1\right]^{-n+1/2} Q_n^m \left[\frac{\left(z+\frac{t}{z}\right)}{\sqrt{\left\{\left(z+\frac{t}{z}\right)^2-1\right\}}}\right]$$

को लेते हैं तथा (2.1) की सहायता से z-समाकल का मान निकालते हैं और सरलता से अपने परिणाम (3.1) पर पहुँचते हैं।

(3.2) को सिद्ध करने के लिये हम परिणाम (2.2) का उपयोग करते हैं तथा उपर्युक्त विधि से अग्रसर होते हैं।

4. विशिष्ट दशायें

हमारे मुख्य समाकल (3.1) तथा (3.2) नितान्त सामान्य प्रकृति के हैं। किन्तु इनमें आगत H-फलन तथा बहुचरीय H-फलन के प्राचलों के विशिष्टीकरण से, ये समाकल रूपान्तर संगत समाकल रूपान्तर प्रदान कर सकते हैं जो उपयोगी तथा सरल हों।

निर्देश

1. एडवर्ड्स, जे०, A Treatise on the Integral Calculus, Vol. II Chelsea Publishing Co., New York, 1954.

2. राठी, सी० बी०, Proc. Glasgow Math. Assoc., 1956, **2**, 173-179.

3. राठी, पी० एन०, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1967, **37A**, 1-4.

4. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पंडा आर०, J. Reine Angew. Math, 1976, **283/284**, 265-274.

5. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, The *H*-Functions of One and Two Veriables with Applications, South Asian Publishers, New Delhi and Madras, 1982.

6. सुजाता वर्मा, **ज्ञानाभ**, 1985, **15**, 71-77.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol 32, No. 1, 1989

सार्वीकृत सहचारी लीजेण्ड्र फलन तथा बहुगुण H-फलन वाला एक परिणाम

बी० एल० माथुर
रक्षा प्रयोगशाला, जोधपुर

[प्राप्त–मार्च 20, 1986]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य एक समाकल सम्बन्ध प्रदान करना है जिसमें सार्वीकृत सहचारी लीजेण्ड्र बहुपदों का कई संमिश्र चरों वाले H-फलन का गुणनफल निहित हो।

Abstract

On a result involving the generalised associated Legendre function and the multiple *H*-function with applications. *By* B. L. Mathur, Defence Laboratory, Jodhpur.

The aim of the present paper is to give an integral relation involving the product of the generalised associated Legendre polynominals and the H-function of several complex variables. The result is general in nature and is believed to be new. Both known or new results may follow easily as its particular or limiting case. Some applications have also been indicated.

1. हाल ही में श्रीवास्तव तथा पण्डा[21,22] ने बहुगुण कंटूरों के द्वारा बहुगुण H-फलन का अध्ययन और उसकी परिभाषा निम्न प्रकार से की है

$$H[z_1, \ldots, z_r] = H^{o,\, \lambda\, :\, (\mu', \gamma');\, \ldots;\, (\mu^{(r)}, \gamma^{(r)})}_{A,\, C\, :\, [B', D'];\, \ldots:\, [B^{(r)}, D^{(r)}]}$$

$$\left(\begin{matrix} [(a) : \theta', \ldots, \theta^{(r)}]; [(b'), \phi']; \ldots; [(b^{(r)}), \phi^{(r)}]; \\ [(c) : \psi', \ldots, \psi^{(r)}] : [(d'), \delta']; \ldots; [(d^{(r)}), \delta^{(r)}]; \end{matrix} z_1, \ldots, z_r \right)$$

$$= 2(\omega\, \pi)^{-r} \int_{-\omega\infty}^{+\infty\omega} \cdots \int_{-\omega\infty}^{+\omega\infty} \phi_1(s_1) \ldots \phi_r(s_r) \psi\, (s_1), \ldots, s_r) z_1^{s_1}, \ldots, z_r^{s_r}$$

$$ds_1, \ldots, ds_r,\ \omega = \sqrt{(-1)}, \tag{1.1}$$

जहां

$$\phi_i(s_i)=\prod_{j=1}^{\mu^{(i)}}\Gamma(d_j^{(i)}-s_i\,\delta_j^{(i)})\prod_{j=1}^{\gamma^{(i)}}\Gamma(1-b_j^{(i)}+s_i\,\phi_j^{(i)})$$

$$\times\left[\prod_{j=1+\mu^{(i)}}^{D^{(i)}}\Gamma(1-d_j^{(i)}+s_i\,\delta_j^{(i)})\prod_{j=1+\gamma^{(i)}}^{B^{(i)}}\Gamma(b_j^{(i)}-s_i\,\phi_j^{(i)})\right]^{-1};$$

$$\forall\ i\in\{1,\ldots,r\},\qquad (1.2)$$

$$\psi(s_i,\ldots,s_r)=\prod_{j=1}^{\lambda}\Gamma(1-a_j+\sum_{i=1}^{i}s_i\,\theta_j^{(i)})$$

$$\times\left[\prod_{j=\lambda+1}^{A}\Gamma(a_j-\sum_{i=1}^{r}s_i\,\theta_j^{(i)})\prod_{j=1}^{C}\Gamma(1-c_j+\sum_{i=1}^{r}s_i\,\psi_j^{(i)})\right]^{-1};$$

$$\forall\ i\in\{1,\ldots,r).\qquad (1.3)$$

बहुगुण H-फलन (1.1) के विभिन्न संकेतनों की विवेचना के लिये तथा उसके अभिसरण प्रतिबन्धों के लिये श्रीवास्तव तथा पण्डा[21,22] के शोधपत्र को देखना चाहिये ।

सहचारी लीजेण्ड्र बहुपदों को शर्मा[19] ने इसके पूर्व निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया है

$$Q_{mk}^{nk}(x)=k^{2m}(2m)!]^{-1}(1-x^k)^n\,D_k^{(m+n)k}(1-x^k)^{2m},$$

$$Q_{mk}^{nk+1}(x)=[k^{2m}(2m)!]^{-1}(1-x^k)^{n+1/k}\,D_k^{mk+nk+k-1}(1-x^k)^{2m},\qquad (1.4)$$

जहाँ

$$\overset{k}{D_k}\equiv\frac{d}{dx}\,x^{2-k}\,\frac{d}{dx}\,,\ \overset{k-1}{D_k}\equiv x^{2-k}\,\frac{d}{dx}\,,\ \text{तथा}$$

D_k^{mk} का अर्थ यह है कि $\overset{k}{D_k}$ m बार आता है एवं $k\geqslant 2$ एक स्थिर धनपूर्णांक हैं। $k=2$ के लिये (1.4) सहचारी लीजेन्ड्र फलन में समानीत हो जाता है ।

लेखक ने[2–13] एक तथा अधिक प्रमेयों में H-फलन वाले अनेक सम्बन्ध प्राप्त किये हैं । यहाँ पर सार्वीकृत सहचारी लीजेन्ड्र फलनों तथा बहुगुण H-फलन से सम्बद्ध एवं समाकल सम्बन्ध प्राप्त किया जावेगा । कुछ सम्भव सम्प्रयोगों का संकेत किया गया है ।

2. परिणाम

यहाँ जिस प्रमुख परिणाम की स्थापना की जाती है वह है

$$\int_0^1 x^{k\sigma}(1-x^k)^n\,Q_{mk}^{nk}(x)\,H[u_1x^k,\ldots,u_rx^k]dx$$

$$= T\times H^{0,\ \lambda+2\ :\ (\mu',\ \gamma');\ \ldots;\ (\mu^{(r)},\ \gamma^{(r)}}_{A+2,\ C+2\ :\ [B',\ D'];\ \ldots;\ [B^{(r)},\ D^{(r)}]}$$

$$\left(\begin{matrix}[(-\sigma):k,\ldots,k],\ [(1-\sigma-1/k):k,\ldots,k],\ [(a):\theta),\ldots,\theta^{(r)}]:\\ [(m-n-\sigma):k,\ldots,k],\ [-(m+n+\sigma+1/k):k,\ldots,k],\ [(c);\psi',\ldots,\psi^{(r)}]:\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}[(b'),\phi'];\ \ldots;\ [(b^{(r)},\phi^{(r)}];\\ [(d'),\delta'];\ \ldots;\ [(d^{(r)}),\delta^{(r)}]:\end{matrix}\ u_1,\ \ldots,\ u_r\right) \qquad (2.1)$$

जो वैध है

$$Re\ \left[k\,\sigma+k\sum_{i=1}^{r} d_j^{(i)}/\delta_j^{(i)}\right] > -1,\ j=1,\ \ldots,\ \mu^{(i)},$$

m तथा n धनपूर्णांक हैं, $m \geqslant n$,

$$T=k^{2n-1}\Gamma(m+n-1)\Gamma(m+n+1/k)[\Gamma(m-n+1)\Gamma(m-n+1/k)]^{-1},$$

तथा (1.1) के लिये आवश्यक अभिसरण प्रतिबन्ध ।

उपपत्ति

परिणाम को प्राप्त करने के लिये हम (2.1) के समाकल्य में आये बहुगुण H-फलन (1.1) को इसके मेलिन-बार्नीज कन्टूर समाकल से स्थानान्तरित करते हैं और समाकलन के क्रम को बदल देते हैं जो इस विधि में निहित समाकलों के परम अभिसरण के कारण वैध है। आन्तरिक समाकल का मान सिंह (1963) के परिणाम को व्यवहृत करके ज्ञात किया जाता है । अन्त में इस परिणाम की विवेचना (1.1) के साथ करने पर वांछित परिणाम प्राप्त होता है ।

3. सम्प्रयोग

प्राचलों के सही चुनाव से बहुगुण H-फलन को कतिपय ज्ञात विशिष्ट फलनों में, जो एक तथा अधिक चरों वाले होते हैं, समानीत किया जा सकता है। मथाई तथा सक्सेना ने[1] एवं श्रीवास्तव, गुप्ता तथा गोयल[20] ने सिलिंडर में उष्मा संचलन आदि के विषय में विवेचना की है ।

(i) (2.1) में $\lambda=A=C=0$ रखने पर r परस्पर स्वतन्त्र एक चर वाले H-फलनों का गुणनफल प्राप्त होता है ।

$$\int_0^1 x^{k\sigma}(1-x^k)^n\ Q_{mk}^{nk}(x)\ \prod_{i=1}^{r} H^{\mu^{(i)},\ \gamma^{(i)}}_{D^{(i)},\ B^{(i)}}\ [u_i\ x^k]\ dx$$

$$= T\times H^{0,\ 2\ :\ (\mu',\ \gamma');\ \ldots;\ (\mu^{(r)},\ \gamma^{(r)})}_{2,\ 2\ :\ [B',\ D'];\ \ldots;\ [B^{(r)},\ D^{(r)}]}$$

$$\left(\begin{matrix}[(-\sigma):k,\ldots,k],\ [(1-\sigma-1/k):k,\ldots,k]:\\ [(m-n-\sigma):k,\ldots,k],\ [(m-n-\sigma-1/k):k,\ldots,k]:\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}[(b'),\phi'];\ \ldots;\ [(b^{(r)},\phi^{(r)}]:\\ [(d'),\delta'];\ \ldots;\ [(d^{(r)}),\delta^{(r)}]:\end{matrix}\ u_1,\ \ldots,\ u_r\right) \qquad (3.1)$$

(2.1) में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

(ii) (2.1) में $r=2$ को प्रतिबन्धित रखते हुये हमें सरलता से प्रधान द्वारा[18] दिया गया सम्बन्ध प्राप्त होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

हम प्रेरणा प्रदान करने के लिये डा० आर० गोपाल को धन्यवाद देते हैं।

निर्देश

1. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, Generalised Hypergeometric Functions with applications in Statistics, Springer-Verlag, 1973.
2. माथुर, बी० एल०, J. Vik. Univ. Sci. 1975, **19**, 71-74.
3. वही, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1976, **19(4)**, 227-31.
4. वही, Univ. Nac. Tucuman Rev. Ser. A, 1978, **27**, 177-183.
5. वही, J. Indian Inst. Sci. Sect. B,, 1978, **60(6)**, 79-84.
6. वही, Aligarh Bull. Math. 1978, **8**, 93_6-9.
7. 'ही, ure Appl. Math. Sci., 1979, **10**, 27-30.
8. वही, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1979 21-24.
9. वही, Indian J. Math., 1979, **21(3)**, 155-59.
10. वही, Univ. Indore Res. J. Sci., 1979, **6(1)**, 55-60.
11. वही, Acad. Ci. Fis. Mat. Natur. Bol. Venezuela 1979, **39**, 33-37.
12. वही, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1980, **23(2)**, 111-115.
13. वही, Indian J. Pure Appl. Math., 1981, **18(2)**, 1001-06.
14. माथुर, बी० एल० तथा कृष्ण, एस०, Kyungpook Mnth. J., 1978, **18**, 239-44.
15. मुनोट, पी० सी० तथा माथुर, बी० एल०, Univ. Nac.Tucuman Rev. Ser. A., 1975, **25**, 231-40
16. वही, Math. Notae. 1976, **25**, 1-5.
17. वही, Bull. Soc. Sci. Math. R. S. Romanie, 1978, **22(70)**, 167-74.

18. प्रधान, के० एम०, Indian J. Math. 1979, **21(2)**, 141-44.

19. शर्मा, ए०, Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A., 1948, **33**, 295-304.

20. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, The *H*-Function of One and Two Variables with Application, South Asian Publishers, New Delhi, 1982.

21. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पण्डा, आर०, J. Rinie. Angew. Math., 1976, **283/284**, 266-74.

22. वही, J. Riene. Angew. Math., 1976, **288**, 129-49.